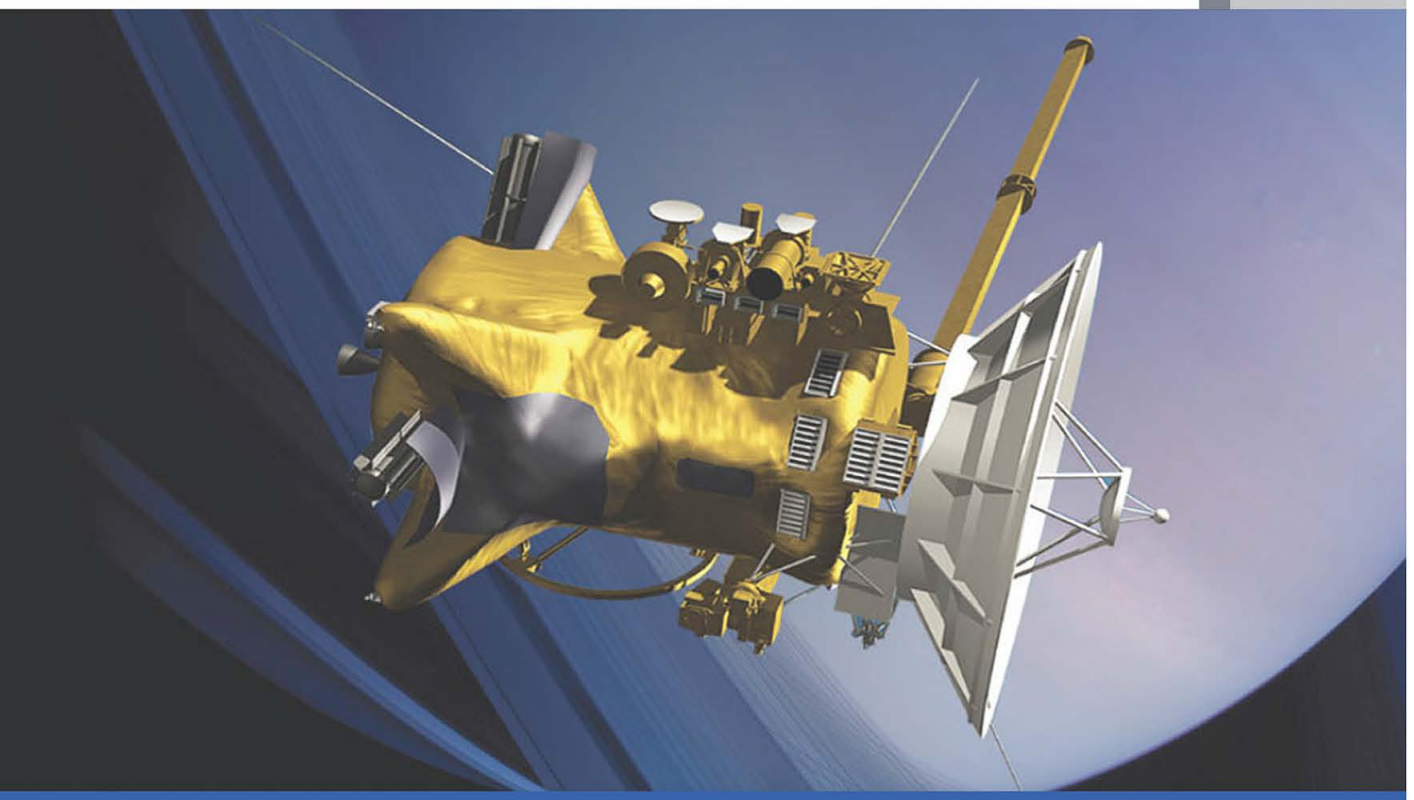
Free Writing

Marco Campagnacci

Tecnica delle Microonde e Linee di Trasmissione

Università degli Studi di
Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria



TECNICA DELLE MICROONDE E LINEE DI TRASMISSIONE

Marco Campagnacci

mcampagnacci@gmail.com

Pubblicato da: Marco Campagnacci, Italy

© 2020: Marco Campagnacci

Questa pubblicazione può essere riprodotta, archiviata in sistemi di backup o trasmessa in qualsiasi forma o con qualsiasi mezzo - elettronico, meccanico, fotocopie, registrazioni o altro - senza la previa autorizzazione scritta dell'editore.

Benché l'autore ritenga che le informazioni e le indicazioni fornite in questo lavoro siano corrette, tutte le parti devono avvalersi delle proprie capacità di giudizio e competenze quando ne fanno uso. L'autore non si assume alcuna responsabilità nei confronti di nessuno per eventuali perdite o danni causati da errori o omissioni nel documento, indipendentemente dal fatto che tali errori o omissioni siano il risultato di negligenza o qualsiasi altra causa. Sono da escludere qualsiasi responsabilità dell'autore.

Coloro che intendessero segnalare eventuali inesattezze e/o errori riportate nella corrente revision del documento potranno segnalarle inoltrando apposita e-mail all'indirizzo dell'autore.

ISBN 0 000000 000 0

Free Writing

1 SOMMARIO

1.1 Indice degli Acronimi 7

2 TEORIA ELETTROMAGNETICA DELLA PROPAGAZIONE 8
2.1 Prefazione 8

3 LA TECNICA DELLE MICROONDE 10
3.1 Strutture guidanti 14
3.1.1 Cavo coassiale 15
3.1.2 Guida d'onda 15
3.1.3 Linee a striscia 15
3.1.4 Microstriscia 16
3.2 Onde TE 21
3.3 Onde TM 28
3.4 Onde TEM 30

4 IMPEDENZE D'ONDA. 34
4.1 Onde TE 34
4.2 Onde TM 37
4.3 Onde TEM 39
4.4 Onde TE $\boldsymbol{Ez = 0}$ 41
4.5 Onde TM $\boldsymbol{Hz = 0}$ 42
4.6 Onde TEM $\boldsymbol{Hz = Ez = 0}$ 42

5 ONDE IN STRUTTURE GUIDANTI. 44
5.1 Onde TE 46
5.2 Onde TM 47
5.3 Onde TEM 47

6 PROBLEMA DELLA DETERMINAZIONE DEI MODI. 51
6.1 Teoria 51
6.2 Caso di Onde TM: 53
6.3 Caso di onde TE: 54
6.4 Velocità di fase 60
6.5 Velocità dell'energia 62
6.6 Velocità di gruppo. 65

FIGURA 6.10 – SPETTRO FUNZIONE SINUSOIDALE 72
6.7 Attenuazione 75
6.8 Onde TE (solo onda diretta) 85
6.8.1 Correnti Longitudinali 87
6.8.2 Correnti Circonferenziali 88
6.9 Onde TM 90
6.10 Onde TEM 92
6.11 Ortogonalità dei modi non degeneri 92
6.12 Modi Degeneri 99

7 GUIDE D'ONDA 102
7.1 Guida d'onda rettangolare 102
7.1.1 Onde TE 102
7.1.2 Onde TM 110
7.1.3 Modo dominante. Modi degeneri 114
7.1.4 Potenza e attenuazione in guida rettangolare 118
7.2 Guida d'onda circolare 125
7.2.1 Onde TE 132
7.2.2 Onde TM 136
7.2.3 Modo dominante e spettro dei modi 138
7.2.4 Modi circolari elettrici, modi degeneri $\boldsymbol{TE0,m}$ 141
7.2.5 Modi Degeneri 143
7.2.6 Attenuazione, potenza per i modi $\boldsymbol{TE0,m}$ 143

8 STRUTTURE GUIDANTI A DUE O PIÙ CONDUTTORI 148
8.1 Cavo coassiale 157

8.1.1 Potenza 161
8.1.2 Attenuazione 162
8.1.3 Modi TE e TM 167

9 METODOLOGIA DELLE LINEE DI TRASMISSIONE 177
9.1 Proprietà generali dei modi. 178

10 ANALISI DEI CIRCUITI A MICROONDE CON METODI MATRICIALI 188
10.1 Strutture reciproche. 197
10.2 Dipendenza della [**S**] dalla scelta dei piani di bocca. 200
10.3 Strutture senza perdite 203

11 STRUTTURE AD UNA BOCCA 206

12 CAVITÀ RISONANTI 220
12.1 Risonatore a sezione rettangolare 221
12.2 Risonatore cilindrico. 223

13 CAVITÀ RISONANTI REALI 233

14 METODI DI SINTESI PER STRUTTURE AD UNA BOCCA 243
14.1 Strutture attive ad una bocca 251

15 STRUTTURE A DUE BOCCHE 256
15.1 Perdite di inserzione 261
15.2 Matrici di Trasferimento. 265
15.3 Matrici di Trasmissione. 266
15.4 Sfasatore 267
15.5 Attenuatore 268
15.6 Isolatore 269

16 STRUTTURE A TRE BOCCHE 271
16.1 Strutture a T simmetriche 274

17 STRUTTURE A QUATTRO BOCCHE 284
17.1 Accoppiatori direzionali simmetrici. 288
17.2 Accoppiatori direzionali non simmetrici (Giunzioni ibride). 288
17.3 Accoppiamento $\mathbb{C}$ 291
17.4 Direttività $\mathbb{D}$ 292
17.5 Isolamento $\mathbb{I}$ 293

18 ACCOPPIATORI DIREZIONALI NELLE TECNICHE DI MISURA 297
18.1 Tipi di accoppiatori direzionali 308

19 COMPONENTI A FERRITE 316
19.1 Giratore 329
19.2 Isolatore ad effetto di Faraday 331
19.3 Circolatore ad effetto Faraday 332
19.4 Birifrangenza 335
19.5 Isolatori a risonanza 338
19.6 Isolatore a scostamento di campo 340

20 GUIDE A MICROSTRISCIA 341

21 LINEE DI TRASMISSIONE 354
21.1 Onde Stazionarie 358
21.2 Potenza Transitante 359
21.3 Carta Di Smith 359
21.4 Esempio 360
21.5 Trasformatore in Quarto d'Onda 362
21.6 Uso della Carta di Smith per l'Adattamento 364
21.7 Doppio Stub 367

22 APPENDICI 370
22.1 Grandezze vettoriali 370
22.1.1 Operazioni lineari tra vettori 371
22.2 Definizione operatori 372

22.2.1 Identità tra Operatori 372
22.3 Sviluppi in serie di Mc Laurin 375
22.3.1 Sviluppo in serie di una funzione 375
22.3.2 Sviluppo in serie di Mc Laurin 375
22.3.3 Notazione ***o*** (o piccolo) 375
22.3.4 Sviluppi in serie 376

1.1 INDICE DEGLI ACRONIMI

A.D. Accoppiatore Direzionale

e.m. Elettromagnetico

e.s. Elettrostatica

d.d.p. Differenza di Potenziale

m.o. Microonde

PEI Parete Elettrica Ideale, caratterizzata da una conducibilità $g = \infty$

PMI Parere Magnetica Ideale, caratterizzata da una

RADAR RAdio Detection and Ranging

T.d.F. Trasformata di Fourier

TE Trasverso Elettrico

TEM Trasverso Elettromagnetico

TM Trasverso Magnetico

TWT Traveling Wave Tube

F.d.B. Funzione di Bessel

BALUN BALanced - UNbalanced

2 TEORIA ELETTROMAGNETICA DELLA PROPAGAZIONE

2.1 PREFAZIONE

Il presente documento è un estratto delle lezioni di Microonde del corso di laurea in Ingegneria Elettronica dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma.

Il corso tratta delle *Teoria Elettromagnetica della propagazione nelle strutture guidanti utilizzate nella tecnica delle microonde*: [1]

- Strutture Guidanti: guide d'onda, cavi coassiali, linee bifilari e multifilari, linea a striscia, microstrisce.
- Modi di propagazione, frequenze di taglio, attenuazione, velocità fase, velocità di gruppo, velocità dell'energia, impedenze d'onda, correnti superficiali.
- Potenza trasportata dai singoli modi, proprietà di ortogonalità, modi degeneri.
- Guide d'onda con più dielettrici.

Rappresentazione dei modi nelle strutture guidanti mediante linee di trasmissione equivalenti:

- Correnti e tensioni equivalenti (varie definizioni utilizzate),
- Teoria delle linee,
- Riflessione,
- Onde stazionarie,
- Diagramma di Smith,
- Adattamento di impedenza.

Cavità risonanti:

- Modi di risonanza, frequenze di risonanza, perdite, coefficiente di risonanza, esempi realizzativi, cavità sintonizzabili.

Studio e circuiti lineari a microonde:

- Caratterizzazione mediante i parametri alle bocche (ammettenza, impedenza, scattering), reciprocità e simmetria delle matrici per circuiti ad N bocche

[1] Whinnery, John R., Van Duzer, Theodore: «*Field and Waves in Communication Electronics*» By S. Ramo, J. Wiley, Cap 11. Robert E. Collin, «*Foundations for Microwave Engineering*», 2nd Edition, Wiley-IEEE Press, ISBN: 0780360311, Dec 2000, 944 Pages

- Proprietà caratteristiche dei sistemi ad 1 bocca, comportamento in frequenza dell'impedenza di ingresso.

Sintesi di circuiti ad una bocca:

- Circuiti equivalenti per cavità risonanti accoppiate a strutture guidanti.

Dispositivi passivi per microonde

Propagazione nella ferrite e principali componenti:

- Tensore di permeabilità delle ferriti magnetizzata, effetto Faraday.

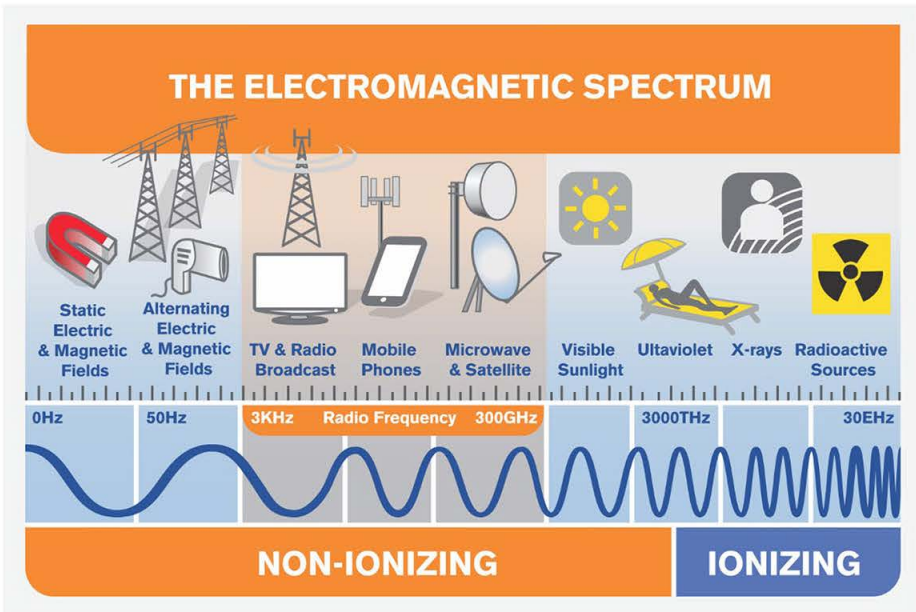
Dispositivi a ferrite:

- Isolatori, circolatori, giratori, filtri sintonizzabili.

3 La Tecnica Delle Microonde

Prendono il nome di "*microonde*"[2] le onde elettromagnetiche aventi una lunghezza d'onda compresa all'incirca tra il metro ed il millimetro, cui corrispondono frequenze tra *300 MHz* e *300 GHz* (propagazione nel vuoto $\lambda = \frac{c_o}{f}$)

Tutti i fenomeni relativi all'utilizzazione di questa banda di altissime frequenze (trasmissione dell'energia componenti, ecc.) sono argomento di indagine della "*tecnica delle microonde*" (talvolta detta pure "*iperfrequenze*").



Caratteristica fondamentale di tale tecnica è che le onde ivi usate hanno una lunghezza d'onda λ comparabile con l'ordine di grandezza delle componenti del sistema con cui esse interagiscono; ciò significa altresì che il tempo di propagazione delle grandezze elettromagnetiche nello spazio è paragonabile al periodo delle correnti alternate che generano le microonde stesse.

L'analisi circuitale basata sulle leggi di *Kirchoff* e l'ipotesi di costanti concentrate, tipica delle basse frequenze, non è più sufficiente in questo caso per un'adeguata descrizione dei fenomeni elettromagnetici[3].

---

[2] Cfr. R.E. Collin: "*Foundations for Microwave Engineering* ", Mc Graw-Hill: § 1.1

[3] Cfr. Collin: Op. cit.: §1.2;
D. Sette "*Lezioni di Fisica*", vol. III ed Veschi: §8.1;

La tecnica delle *m.o.* può essere considerata una applicazione della generale teoria dei campi elettromagnetici. I motivi del grande interesse nell'utilizzazione del campo di frequenze delle *m.o.* sono molteplici.

Innanzitutto, la necessità di usare spettri di frequenze sempre più ampi (maggiore fedeltà nella riproduzione di informazioni) ha portato all'impiego di frequenze elevatissime.

Per molto tempo, in particolare durante la Seconda guerra mondiale, le *m.o.* sono state legate al ***RADAR*** (*RAdio Detection And Ranging*: radio rivelazione e localizzazione), che ancor oggi, anche se in forme più raffinate e diversificate, ne rappresenta una fondamentale applicazione.

L'uso delle *m.o.* è collegato in questi casi alla possibilità di ottenere antenne in grado di irradiare nello spazio gran parte della loro energia in uno stretto fascio (simile in qualche modo a quello che può essere prodotto nel campo ottico da un laser): ciò è in genere ostacolato da fenomeni di diffrazione, che però possono essere regolati e ridotti, scegliendo opportunamente il campo di frequenze e la forma e l'ampiezza d'apertura di irraggiamento dell'antenna)

Cosicché per un'antenna parabolica si può trovare la relazione che ci fornisce l'angolo $\alpha°$ (apertura del cono di emissione) in funzione della lunghezza λ e del suo diametro d:

$$\alpha^{\circ} = 140^{\circ}\frac{\lambda}{d}$$

Perciò un'antenna di 90 *cm* può produrre un fascio di appena 5°di apertura, alla frequenza di 10 *GHz* (λ = 3 cm): per ottenere effetti equivalenti alla frequenza di 100 *MHz* sarebbe necessaria un'antenna di circa 90 *m*.

In tempi più recenti le "*iperfrequenze*" hanno avuto un uso sempre più vasto anche nei collegamenti per telecomunicazioni (servizi pubblici, televisione, telefonia, connettività, ecc.): per quanto detto la propagazione avviene in aria attraverso punti visibili tra loro (ponti radio, etc.)

G. Martinelli - M. Salerno: "*Fondamenti di Elettrotecnica - Circuiti a costanti concentrate lineari e permanenti (Vol. I e II)*", Siderea, App. A.

Un ulteriore sistema in sviluppo per la comunicazione consiste nell'uso di satelliti come stazioni di collegamento; le piccole dimensioni di questi (il diametro può essere inferiore ad un metro), implicano modelli di antenne su essi di grandezze pure contenuta (utilizzabili efficacemente, come visto, solo alle iperfrequenze).

È noto che per la trasmissione di segnali è economicamente vantaggioso poter utilizzare nel contempo lo stesso canale di comunicazione, effettuando cioè una modulazione in frequenza esempio giacché ciascun programma televisivo in bianco e nero richiede una larghezza di banda di circa $6\,MHz$ per la trasmissione di un centinaio di questi lungo un solo canale, è necessaria una banda totale di $600\,MHz$ sé sa che per l'utilizzazione pratica della banda di modulazione deve risultare una piccola frazione "*della frequenza portante*" questa dovrà quindi appartenere in genere al campo tipico delle *m.o.* (iperfrequenze) ; con ciò si amplia notevolmente la quantità di informazioni trasmissibile nelle telecomunicazioni.

Accanto a questi importantissimi aspetti, la tecnica delle *m.o.* trova tante altre applicazioni in pratica. Molto interessante l'aspetto energetico delle microonde: infatti è noto dalla teoria corpuscolare della materia che un certo fenomeno *e.m.* di emissione per una radiazione è dovuto a una transazione della sorgente da uno stato con una certa energia ad un altro con energia inferiore. Se in particolare un atomo passa da una condizione fisica a cui è associata l'energia E_1 ad un'altra di energia E_2 (minore di E_1), viene emessa una radiazione di frequenza f, tale da soddisfare alla relazione $E_2 - E_1 = hf$ dove h è la costante di *Planck* ($h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,J\,s = 4.125 \cdot 10^{-15} eV\,s$).

Sulla base della concezione corpuscolare - ondulatoria si può dire che è emesso un fotone di energia hf, propagandosi un'onda di frequenza f.

Allorché n atomi della sorgente compiono tale transizione l'energia totale irraggiata (per n fotoni emessi) sarà $E = nhf$ multipla del quanto fondamentale hf per quella certa frequenza.

Analogamente l'assorbimento della radiazione avviene per transizione del ricevitore dall'energia E' all'energia $E'' = E' + hf$. Se andiamo ad applicare queste considerazioni nel nostro campo di studio, osserviamo che l'energia dei fotoni alle frequenze tipiche delle *m.o.* è assai minore dell'energia di ionizzazione degli elementi

presenti in natura (cioè dell'energia richiesta per sottrarre a un atomo l'elettrone meno fortemente legato).

Ad esempio, a 300 GHz si hanno fotoni di energia $E = 1.24E-3\,eV$, laddove glia atomi per ionizzarsi richiedono energie dell'ordine delle decine o al più delle unità di eV); le radiazioni sono pertanto radiazioni non ionizzanti.[4]

Alla temperatura ambiente, ad es. $T = 293\,K = 20\,℃$, questa energia termica è $W = 2.53E-2\,eV$, si deduce che se l'energia *e.m.* delle *m.o.* interagisce con la materia, avendo approssimativamente lo stesso contenuto energetico, si ha uno scambio tra queste, che si esplica attraverso un effetto termico: le microonde, cioè, possono essere usate come fonte energetica (forni a microonde).

Le *m.o.* trovano applicazione tra l'altro anche nel campo dell'astrofisica (specialmente in ricevitori che analizzano le radiazioni *e.m.* solari o il rumore irradiato dal plasma) come pure nella fisica nucleare. Ad esempio, l'esame dei fenomeni di risonanza di particelle molecolari, atomiche e nucleari, sotto l'azione di forze periodiche derivanti dall'applicazione di un campo *e.m.* fanno riferimento al campo delle iperfrequenze.

Negli acceleratori opportune strutture guidanti convogliano onde *e.m.* aventi velocità molto minori della luce che interagiscono in maniera efficace con fasci di particelle accelerate alla stessa velocità, fornendo loro energia.

Procedimenti opposti possono avvenire nei fasci elettronici per l'amplificazione delle onde *e.m.* (***TWT*** *Traveling Wave Tube*).

Accanto alle ricerche sperimentali basate sulle *m.o.*, sono da ricordare interessanti dispositivi, come quelli impieganti ferrite, gli amplificatori e oscillatori a *m.o.* allo stato solido (maser o amplificatore quantico) e amplificatori a luce coerente (laser).

Lo sviluppo avuto in tempi recentissimi dai laser alle fibre ottiche ha stimolato particolarmente la ricerca sulla possibilità di realizzare sistemi di comunicazione alle lunghezze d'onda intorno al visibile (banda di frequenze talvolta dette delle

[4] L'energia $h\,f$ dei quarti è invece comparabile, alle iperfrequenze, con l'energia media di agitazione termica kT (dove k è la costante di *Boltzmann*: k=1.38E-23 j/K = 8.625E-5 eV/K; "T" è la temperatura assoluta in Kelvin), collegata all'eccitazione degli atomi, visti come "*oscillatori*".

ultramicroonde): con qualche modifica gran parte dell'attuale tecnica delle *m.o.* può essere utilizzata per lo sviluppo di questi sistemi di telecomunicazione basati sull'ottica (optoelettronica).

Un campo applicativo delle *m.o.* della massima importanza è infine quello della medicina. La terapia a *m.o.* o "*radarterapia*", in cui si ha la penetrazione e l'assorbimento delle *m.o.* da parte dei tessuti con produzione di calore, è indicata per la riabilitazione fisica (contusioni e distorsioni muscolari, algie reumatiche, etc.).

La "*termoterapia localizzata con radiofrequenze*" si sta affermando nel trattamento dei tumori, specie se inoperabili. Si è visto infatti che le cellule cancerose sono in genere più sensibili al calore di quelle normali (l'azione del calore è potenziata dalla scarsa vascolarizzazione dei tumori, che disperdono pertanto l'eccesso termico più lentamente dei tessuti sani).

Il calore applicato mediante speciali apparecchiature a *m.o.* è in grado di raggiungere profondità elevate (risparmiando dall'azione termica i tessuti interposti tra la superficie corporea e la massa tumorale): a una data temperatura le cellule cancerose vengono distrutte e i prodotti della loro distruzione stimolano le difese immunitarie dell'organismo.

Quanto detto finora voleva essere solo una sommaria panoramica sulle possibili implicazioni della tecnica delle *m.o.*, rimangono ben lungi da un'indagine in qualche modo esauriente. Sebbene le microonde siano oggetto di una disciplina ormai molto approfondita, le possibilità per ulteriori sviluppi a livello tecnico pratico risultano tuttora aperte.

3.1 STRUTTURE GUIDANTI

Uno dei requisiti fondamentali della tecnica delle microonde consiste nella possibilità di trasferire energia *e.m.* nello spazio senza apprezzabili perdite. Per riuscire a convogliare le onde *e.m.* (e con esse l'energia) in maniera efficace possono pensarsi sistemi diversi: le strutture guidanti più usate e cui faremo esplicito riferimento in seguito, appartengono a pochi tipi standard. Questi si sono affermati con modalità diversa nel tempo in relazione alle tecniche disponibili, richiedendo altresì tutta una specifica tecnologia di costruzione dei vari componenti che

intervengono nella emissione, trasmissione e ricezione dell'energia *e.m.* (ad es. generatori, accumulatori, frequenzimetri e così via).

Pertanto, le strutture guidanti più note possono essere così schematizzate:

3.1.1 Cavo coassiale

Costituito da due conduttori cilindrici coassiali separati da un dielettrico. È stato il primo tipo ad essere usato nella tecnica delle *m.o.*; successivamente abbandonato, da tempi recenti viene riutilizzato in nuove ottiche.

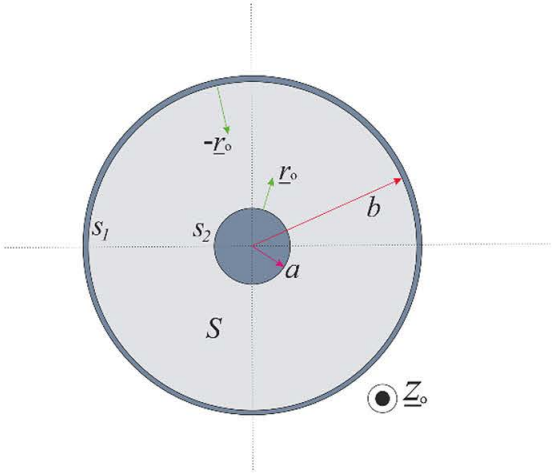


Figura 3.1 - Sezione di un cavo

3.1.2 Guida d'onda

Costituita da un tubo metallico cavo; la sezione può essere diversa: rettangolare, circolare, ellittica, ecc..

È entrata particolarmente in uso con lo sviluppo di onde a frequenze superiori ad 1 *GHz*.

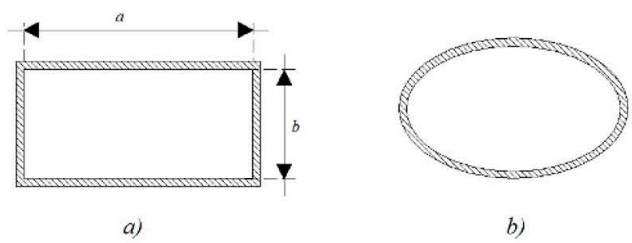


Figura 3.2 - Sezione di una guida d'onda a) rettangolare b) ellittica.

3.1.3 Linee a striscia

Costituite da due conduttori piatti paralleli (ovvia estensione delle linee bifilari per la trasmissione dell'energia a bassa frequenza). La tipica struttura delle linee a striscia le rende particolarmente adatte all'integrazione con dispositivi a tecnologia planare (transistori etc.).

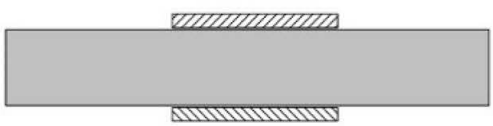


Figura 1.3 - Sezione di una linea a striscia.

3.1.4 Microstriscia

Costituita da un conduttore e una piattina conduttrice tra cui interposto un dielettrico. Si possono fare considerazioni analoghe al caso precedente, tenendo conto del fatto che questa struttura, ancora di tipo planare, è tipica dei circuiti stampati e anche per la sua particolare leggerezza essa è utilizzata in un vasto campo di applicazioni.

Figura 1.4 - Sezione di una linea a microstriscia.

Ulteriori pregi e difetti dei vari tipi di strutture guidanti saranno evidenziati in un loro esame successivo più dettagliato.

Va subito fatto notare, però che strutture metalliche chiuse sul tipo del cavo coassiale e della guida d'onda consentono la trasmissione con basse perdite d'energia, mentre, laddove la struttura metallica è aperta (la sezione trasversale) si hanno maggiori attenuazioni dell'energia *e.m.*.

Come si è già avuto modo di accennare, giacché le strutture guidanti (e gli altri componenti a queste collegati) hanno dimensioni paragonabili alle lunghezze d'onda qui utilizzate, la tecnica delle *m.o.* va esaminata attraverso l'applicazione della teoria dei campi *e.m.*.

L'analisi dei campi *e.m.* si riconduce allo studio delle equazioni di *Maxwell*. Considerando una regione esterna alle sorgenti del campo *e.m.* (le correnti elettriche e magnetiche impresse $\underline{J}_i$ e $\underline{J}_{mi}$, sono nulle) le equazioni di *Maxwell*, nell'ipotesi di regime armonico, assumono la forma (in mezzi omogenei e isotropi):

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\, \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= -j\omega\varepsilon_c\, \underline{E},\ con\ \varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{g}{\omega} \end{aligned} \tag{3.1}$$

in cui $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ (rispettivamente campo elettrico e magnetico) sono vettori complessi; μ è la permeabilità magnetica; ε_c è la costante dielettrica complessa, legata alla conducibilità elettrica del mezzo, g, e alla costante dielettrica ε dalla relazione:

$$j\omega\varepsilon_c = g + j\omega\varepsilon$$

Dall'analogia formale che vengono così ad assumere le due equazioni di *Maxwell* si deduce che è possibile passare da una espressione all'altra mediante le sostituzioni:

$$\underline{E} \to \underline{H}, \qquad \underline{H} \to -\underline{E}, \qquad \mu \to \varepsilon_c, \qquad \varepsilon_c \to \mu$$

che esprimono il noto "*principio della dualità*", di carattere del tutto generale e di grande importanza teorico - pratica. Dal sistema di equazioni differenziali vettoriali del primo ordine si può ricavare per derivazione una equazione differenziale vettoriale del secondo ordine, in cui appare un unico vettore rappresentativo del campo (equazioni delle onde); infatti, attraverso noti passaggi[5] si ottengono le espressioni di *Helmholtz*:

$$\nabla^2 \underline{E} = K^2 \underline{E} \qquad (3.2)$$
$$\nabla^2 \underline{H} = K^2 \underline{H} \qquad (3.3)$$

dove si è posto $K^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c$

In genere la risoluzione della (3.2) o (3.3) ha il vantaggio di essere facilmente ottenibile; va precisato però che essa non è equivalente a quella del sistema (3.1): si possono ricavare delle soluzioni della equazione delle onde che non soddisfano la (3.1), ciò significa che il campo *e.m.* non può ricavarsi semplicemente dalla (3.2) o (3.3) ma occorre che siano soddisfatte delle condizioni aggiuntive imposte dalle equazioni di *Maxwell*.

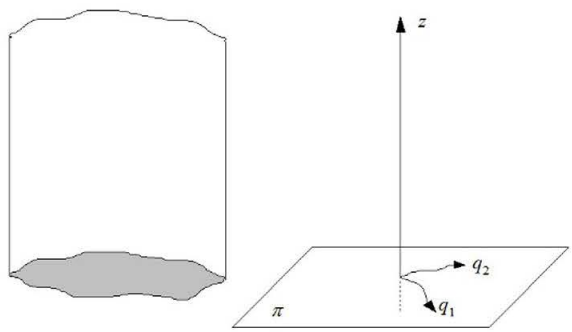


Figura 1.5 - Struttura guidante a simmetria cilindrica e sistema di coordinate cilindriche generalizzate

Si visto come nella tecnica delle microonde ci si riferisca spesso a strutture guidanti in cui interessa studiare la propagazione dell'energia *e.m.* secondo una determinata direzione costante, che faremo coincidere con l'asse cartesiano z.

Per i piani normali a z si assumerà un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (q_1, q_2) scelto nella maniera più comoda per rappresentare la struttura (ad es. per strutture a sezione circolare useremo coordinate polari ρ, θ mentre per sezioni rettangolari quelle cartesiane x, y e così via).

[5] Cfr., ad es., Barzilai "*Fondamenti di elettromagnetismo*", ed Siderea, 3 Edizione pag. 293-296

In genere avremo così un sistema di coordinate q_1, q_2, z, alle quali si darà il nome di coordinate cilindriche generalizzate. In un tale sistema di riferimento le espressioni delle equazioni del campo *e.m.* (3.1, 3.2, 3.3) assumono una particolare struttura semplificata. Infatti, il campo elettrico ed il campo magnetico possono essere scomposti in una componente trasversale e in una longitudinale rispetto alla direzione di propagazione delle onde:

$$\underline{E} = \underline{E}_t + \underline{z}_o E_z$$
$$\underline{H} = \underline{H}_t + \underline{z}_o H_z$$

Analogamente per l'operatore ∇ si ha:

$$\nabla = \underline{q}_{10}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\,\cdot}{\partial q_1} + \underline{q}_{20}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\,\cdot}{\partial q_2} + \underline{q}_{30}\frac{1}{h_3}\frac{\partial\,\cdot}{\partial q_3} = \nabla_t(\cdot) + \underline{z}_o\frac{\partial\,\cdot}{\partial z}, \qquad (3.4)$$

dove si è posto

$$\nabla_t(\cdot) = \underline{q}_{10}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\,\cdot}{\partial q_1} + \underline{q}_{20}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\,\cdot}{\partial q_2}$$

il coefficiente metrico di h_3, relativo a z, è unitario.

Ancora per il *Laplaciano*:

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(\nabla_t(\cdot) + \underline{z}_o\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\right)\left(\nabla_t(\cdot) + \underline{z}_o\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\right) = \nabla_t^2(\cdot) + \underline{z}_o\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}, \qquad (3.5)$$

(in cui, nell'operazione formale di prodotto scalare $\nabla_t(\cdot)$ e $\underline{z}_o\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$ risultano tra loro ortogonali).

Ciò posto l'equazione delle onde (3.2) può riscriversi:

$$\nabla^2\underline{E} = K^2\underline{E} = \left(\nabla_t^2(\cdot) + \underline{z}_o\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}\right)\left(\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z\right) = K^2\left(\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z\right)$$

e sviluppando:

$$\nabla_t^2\underline{E}_t + \underline{z}_o\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2\underline{E}_t}{\partial z^2} + \underline{z}_o\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = K^2\underline{E}_t + \underline{z}_o K^2 E_z$$

Ciascun termine di questa espressione è parallelo o normale a $\underline{z}_o$, pertanto essa può essere scomposta nelle due equazioni:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \underline{E}_t + \dfrac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} = K^2 \underline{E}_t \\ \nabla_t^2 E_z + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = K^2 E_z \end{cases}, \qquad (3.6)$$

eguagliando tra di loro tutti i termini, rispettivamente normali e paralleli alla direzione individuata da $\underline{z}_0$. In maniera duale si ha per il campo magnetico:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \underline{H}_t + \dfrac{\partial^2 \underline{H}_t}{\partial z^2} = K^2 \underline{H}_t \\ \nabla_t^2 H_z + \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = K^2 H_z \end{cases}, \qquad (3.7)$$

La (3.6) e la (3.2) [ovvero la (3.7) e la (3.3)] sono perfettamente equivalenti; tuttavia con l'introduzione del sistema di coordinate cilindriche generalizzate, la risoluzione analitica del problema *e.m.* presenta minori difficoltà.

Quella delle onde è infatti una equazione differenziale vettoriale del secondo ordine in tre incognite; la (3.6) o la (3.7) è invece un sistema costituito da un'equazione differenziale vettoriale del secondo ordine in due sole incognite (le grandezze trasversali) e da un'equazione differenziale scalare in un'unica incognita.

È bene ricordare che l'uso delle (3.6) e (3.7), come quello delle (3.2) e (3.3), va effettuato *cum grano salis*, in quanto le soluzioni che ne derivano potrebbero non rappresentare un campo *e.m.*).

Con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare le (3.2) e (3.3) si ottiene dalla prima equazione di *Maxwell* (campo elettrico):

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\, \underline{H} \Longrightarrow \left(\nabla_t(\cdot) + \underline{z}_o \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\right) \times \left(\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z\right) = -j\omega\mu\left(\underline{H}_t + \underline{z}_o H_z\right)$$

sviluppando si ha:

$$\nabla_t \times \underline{E}_t + \nabla_t \times \underline{z}_o E_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t - j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o$$

ricordando che $\nabla \times \Phi\underline{A} = \Phi\left(\nabla \times \underline{A}\right) - \underline{A} \times \nabla\Phi$ avremo che:

$$\nabla_t \times \underline{z}_o E_z = E_z\left(\nabla_t \times \underline{z}_o\right) - \underline{z}_o \times (\nabla_t E_z) = -\underline{z}_o \times (\nabla_t E_z)$$

dove il primo termine a secondo membro è nullo in quanto è una derivazione di un vettore costante (versore), per cui sostituendo:

$$\nabla_t \times \underline{E}_t - \underline{z}_o \times (\nabla_t E_z) + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t - j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o$$

La scomposizione in termini paralleli e normali a $\underline{z}_o$ ci permette di ottenere un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times (\nabla_t E_z) + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \end{cases} \tag{3.8}$$

Per il *principio di dualità* otteniamo:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{H}_t = -j\omega\varepsilon_c\, E_z\, \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times (\nabla_t H_z) + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases} \tag{3.9}$$

Le (3.8) e (3.9), corrispondenti alle equazioni di *Maxwell* (3.1), si prestano in maniera particolarmente efficace per lo studio dei campi *e.m.* nelle strutture guidanti, e ad esse ci riferiremo nel seguito per un loro esame più specifico.

Riscriviamo per comodità le equazioni di *Maxwell* sotto forma di un unico sistema.

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times (\nabla_t E_z) + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = -j\omega\varepsilon_c\, E_z\, \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times (\nabla_t H_z) + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases} \tag{3.10}$$

Pur conservando ancora caratteristiche del tutto generali le (3.10) sono particolarmente adatte allo studio della trasmissione di onde *e.m.* in strutture guidanti a simmetria cilindrica.

Un'ipotesi semplificatrice fondamentale per le (3.10) consiste nel considerare una particolare classe di campi *e.m.*, caratterizzati dalla seguente proprietà: le componenti trasverse del campo, $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$, in genere funzioni delle tre coordinate q_1, q_2, z, vengono scomposte ognuna nel prodotto di due termini uno, funzione vettoriale delle coordinate trasversali q_1, q_2; l'altra funzione scalare della sola coordinata longitudinale z.

Questa semplificazione analitica consente di scrivere:

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \end{cases} \tag{3.11}$$

Evidentemente non tutti i campi *e.m.* possono essere posti nella forma (3.11) (basti pensare alle onde *e.m.* sferiche). La classe di campi *e.m.* individuata da equazioni del tipo (3.11) è comunque la più opportuna per descrivere in maniera semplice la propagazione la propagazione di un'onda *e.m.* in una struttura guidante, permettendo di ricondurre lo studio delle microonde a quello delle linee di trasmissione.

È bene notare che fino ad ora non è stata fatta nessuna ipotesi circa le componenti nella direzione di propagazione E_z e H_z: tra i campi del tipo (3.11) è utile individuare quelli aventi ulteriori condizioni semplificatrici.

Avremo perciò un:

1) Campo trasverso elettrico (***TE***) se $E_z = 0$.
2) Campo trasverso magnetico (***TM***) se $H_z = 0$.
3) Campo trasverso elettromagnetico (***TEM***) se $E_z = H_z = 0$.

L'esistenza di tali tipi di onde, che sono poi quelle effettivamente utilizzate in pratica, è strettamente condizionata dalla particolare struttura guidante in cui esse si propagano: esamineremo in seguito quali onde trasverse potranno presentarsi nei vari supporti guidanti; innanzitutto analizzeremo la forma generale che assumono le equazioni di ***Maxwell*** nel caso di onde ***TE***, ***TM*** e ***TEM***.

3.2 Onde TE

Con la condizione per le onde ***TE*** ($E_z = 0$) le (3.10) assumono la forma:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \\ -\underline{z}_o \times (\nabla_t H_z) + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases} \tag{3.12}$$

Introducendo ora l'ipotesi di separabilità delle variabili, secondo le (3.11), la prima equazione delle (3.12) diviene:

$$\nabla_t \times \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) = -j\omega\mu\, H_z(q_1, q_2, z)\, \underline{z}_o$$

Quindi dato che ∇_t opera solo su grandezze trasversali

$$Z_e(z)\left[\nabla_t \times \underline{e}_t(q_1, q_2)\right] = -j\omega\mu\, H_z(q_1, q_2, z)\, \underline{z}_o$$

Dall'esame di questa uguaglianza si deduce (per la forma del primo membro) che la dipendenza di $H_z(q_1, q_2, z)$ da z è data unicamente dal termine $Z_e(z)$ anche $H_z(q_1, q_2, z)$ può scomporsi perciò:

$$H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2)\, Z_e(z)$$

(Si noti che come un'onda ***TE*** la componente longitudinale di $\underline{H}$ e la componente trasversale di $\underline{E}$ hanno la stessa dipendenza da z.)

Le grandezze *e.m.* per un'onda ***TE*** possono riassumersi allora nelle:

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ \underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \\ H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2)\, Z_e(z) \end{cases} \qquad (3.13)$$

Con l'ultima delle (3.13) la prima delle (3.12) diviene allora:

$$\nabla_t \times \underline{e}_t(q_1, q_2) = -j\omega\mu\, h_z(q_1, q_2)\, \underline{z}_o$$

Sostituendo poi le (3.13) nella seconda delle (3.12) si ha:

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z)}{\partial z} = -j\omega\mu$$

per cui:

$$\frac{\partial Z_e(z)}{\partial z} \underline{z}_o \times \underline{e}_t(q_1, q_2) = -j\omega\mu\, \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z)$$

Analogamente per la terza delle (3.12):

$$\nabla_t \times \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) = 0$$

cioè:

$$\nabla_t \times \underline{h}_t(q_1, q_2) = 0$$

Infine, per la quarta delle (3.12):

$$-Z_e(z)\left[\underline{z}_o \times \nabla_t h_z(q_1, q_2)\right] + \underline{z}_o \times \underline{h}_t(q_1, q_2) \frac{\partial Z_h(z)}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z)$$

Riassumiamo le quattro equazioni trovate:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t(q_1,q_2) = -j\omega\mu\, h_z(q_1,q_2)\, \underline{z}_o \\ \dfrac{\partial Z_e(z)}{\partial z}\underline{z}_o \times \underline{e}_t(q_1,q_2) = -j\omega\mu\, \underline{h}_t(q_1,q_2)\, Z_h(z) \\ \nabla_t \times \underline{h}_t(q_1,q_2) = 0 \\ -Z_e(z)\left[\underline{z}_o \times \nabla_t h_z(q_1,q_2)\right] + \dfrac{\partial Z_h(z)}{\partial z}\underline{z}_o \times \underline{h}_t(q_1,q_2) = j\omega\varepsilon_c\, Z_e(z)\, \underline{e}_t(q_1,q_2) \end{cases} \tag{3.14}$$

Le (3.14) possono ancora essere semplificate infatti esaminando la seconda si evidenzia il fatto che il fatto che i vettori $\underline{z}_o \times \underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ hanno la stessa direzione (normale a $\underline{z}_o$): dovendo avere i due membri la stessa dipendenza da z, sarà soddisfatta una relazione di proporzionalità del tipo, supponendo la costante K_z non nulla:

$$\frac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h$$

Nella quarta equazione delle (3.14) i tre vettori $\underline{z}_o \times \nabla h_z$, $\underline{z}_o \times h_t$ ed $\underline{e}_t$ hanno la stessa direzione (normale a $\underline{z}_o$) e analogamente possiamo scrivere:

$$\frac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e$$

La legge di variazione del campo *e.m.* lungo la direzione di propagazione è espressa pertanto dalle equazioni differenziali scalari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h \\ \dfrac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e \end{cases} \tag{3.15}$$

Queste sono finalmente identiche alle note equazioni delle linee di trasmissione[6], nella particolare circostanza in cui le due costanti sono uguali: nel nostro caso, infatti, la scelta della stessa costante di proporzionalità K_z implica una precisa restrizione del valore di Z_e o Z_h, permettendoci di dedurre univocamente l'uno noto l'altro (e viceversa).

In effetti, differenziando la prima delle (3.15) si ottiene:

$$\frac{d^2Z_e(z)}{dz^2} = -K_z\, \frac{dZ_h(z)}{dz} = K_z^2\, Z_e(z)$$

[6] A questo risultato si è giunti sotto l'ipotesi di separabilità delle variabili nei campi *e.m.*

cioè una tipica equazione delle onde, la cui soluzione ha la forma:

$$Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}$$

Nota $Z_e(z)$, avremo per $Z_h(z)$

$$Z_h(z) = -\frac{1}{K_z}\frac{dZ_e(z)}{dz} = -\frac{1}{K_z}(K_z\, P_1\, e^{K_z z} - K_z P_2\, e^{-K_z z}) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}$$

Ritornando alle (3.14), sostituendovi le (3.15), avremo:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t(q_1, q_2) = -j\omega\mu\, h_z(q_1, q_2)\, \underline{z}_o \\ K_z\, \underline{z}_o \times \underline{e}_t(q_1, q_2) = -j\omega\mu\, \underline{h}_t(q_1, q_2) \\ \nabla_t \times \underline{h}_t(q_1, q_2) = 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t h_z(q_1, q_2) + K_z\, \underline{z}_o \times \underline{h}_t(q_1, q_2) = j\omega\varepsilon_c\, \underline{e}_t(q_1, q_2) \end{cases} \tag{3.16}$$

Lo studio svolto finora sull'espressione delle onde ***TE*** è valido per qualsiasi tipo di struttura guidante: vedremo in seguito che le ulteriori ipotesi (condizioni al contorno che si dovranno introdurre considerando la propagazione in ognuna di esse, influiranno unicamente sul gruppo di equazioni (3.16) (in cui compaiono solo funzioni delle variabili trasversali q_1, q_2), lasciando inalterata la legge di dipendenza da z, data dalle (3.15).

La risoluzione delle (3.16) è ancora abbastanza complessa, per cui in pratica si preferisce seguire un diverso procedimento derivante dalle equazioni delle onde *e.m.* (*Helmholtz*), in cui è possibile prendere in esame separatamente il campo elettrico e quello magnetico.

Ricordiamo le equazioni delle onde (3.6) ed (3.7):

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \underline{E}_t + \dfrac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} = K^2\, \underline{E}_t \\ \nabla_t^2 E_z + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = K^2\, E_z \\ \nabla_t^2 \underline{H}_t + \dfrac{\partial^2 \underline{H}_t}{\partial z^2} = K^2\, \underline{H}_t \\ \nabla_t^2 H_z + \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = K^2\, H_z \end{cases} \tag{3.17}$$

in cui la seconda delle (3.17) è identicamente nulla per i campi ***TE***. Introducendo l'ipotesi di separazione delle variabili (data dalla (3.13), la quarta equazione delle (3.17) diviene:

$$K_z \nabla_t^2 h_z + \frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} h_z = K^2 \, Z_e \, h_z$$

e tenendo conto della $\frac{d^2 Z_e}{dz^2} = K_z^2 \, Z_e$, si ha per sostituzione:

$$\nabla_t^2 h_z + K_z^2 h_z = K^2 \, h_z \quad \Longrightarrow \quad \nabla_t^2 h_z = (K^2 - K_z^2) \, h_z$$

Ponendo $K^2 - K_z^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c - K_z^2 = K_t^2$, si arriva alla:

$$\boxed{\nabla_t^2 h_z = K_t^2 \, h_z}$$

Si può dire che il problema *e.m.* relativo alle componenti trasversali di un campo ***TE*** consiste fondamentalmente nella risoluzione di questa equazione differenziale scalare del secondo ordine, con le opportune condizioni al contorno, determinate dalla particolare struttura guidante: nota la h_z possono quindi ricavarsi le altre componenti trasversali del campo ***TE***.

Infatti, per individuare $\underline{e}_t$, moltiplicando vettorialmente per $\underline{z}_o$ ambo i membri della seconda equazione delle (3.16) si ha:

$$K_z \, \underline{z}_o \times (\underline{z}_o \times \underline{e}_t) = j\omega\mu \, (\underline{z}_o \times \underline{h}_t)$$

che, essendo $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \, \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \, \underline{B})$, diviene:

$$K_z \left[\underline{z}_o (\underline{z}_o \underline{e}_t) - \underline{e}_t (\underline{z}_o \underline{z}_o)\right] = K_z \underline{e}_t = j\omega\mu \, (\underline{z}_o \times \underline{h}_t)$$

Da cui

$$\underline{z}_o \times \underline{h}_t = -\frac{K_z}{j\omega\mu} \underline{e}_t$$

Sostituendo ora questa espressione di $(\underline{z}_o \times \underline{h}_t)$ nella quarta equazione delle (3.16)

$$(-\underline{z}_o \times \nabla_t h_z) + \frac{K_z^2}{j\omega\mu} \underline{e}_t = j\omega\varepsilon_c \, \underline{e}_t \quad \Longrightarrow \quad -\underline{z}_o \times \nabla_t h_z = \left(j\omega\varepsilon_c - \frac{K_z^2}{j\omega\mu}\right) \underline{e}_t \quad \Longrightarrow \quad -\underline{z}_o \times \nabla_t h_z = \frac{K^2 - K_z^2}{j\omega\mu} \underline{e}_t$$

perciò avremo:

$$\boxed{\underline{e}_t = -\frac{j\omega\mu}{K_z^2} \underline{z}_o \times \nabla_t h_z}$$

Ricavata $\underline{e}_t$ basta utilizzare la relazione già trovata $\underline{z}_o \times \underline{h}_t = -\frac{K_z}{j\omega\mu}\underline{e}_t$ che moltiplicata vettorialmente per $\underline{z}_o$ fornisce la:

$$\boxed{\underline{h}_t = \frac{K_z}{j\omega\mu}\underline{z}_o \times \underline{e}_t}$$

Riassumiamo le espressioni delle componenti trasverse:

$$\begin{cases} e_z = 0 \\ \underline{e}_t = -\dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\,\underline{z}_o \times \nabla_t h_z \\ \underline{h}_t = \dfrac{K_z}{j\omega\mu}\underline{z}_o \times \underline{e}_t \\ \nabla_t^2 h_z = K_t^2\, h_z \end{cases} \qquad (3.18)$$

L'insieme delle (3.15) e (3.18) permette la completa risoluzione del problema *e.m.* per le onde TE. Ricapitolando può seguirsi il seguente procedimento:

- Si risolve con le opportune condizioni al contorno l'equazione $\nabla_t^2 h_z = K_t^2\, h_z$
- Calcolata $h_z(q_1, q_2)$ si ricava il valore $\underline{e}_t(q_1, q_2)$ grazie alla $\underline{e}_t = -\frac{j\omega\mu}{K_t^2}\,\underline{z}_o \times \nabla_t h_z$
- Da quest'ultimo si risale ad $\underline{h}_t(q_1, q_2)$ tramite la $\underline{h}_t = \frac{K_z}{j\omega\mu}\underline{z}_o \times \underline{e}_t$
- Dalle (3.15) si ottengono i valori di $Z_e(z)$ e $Z_h(z)$ come già visto.
- Noti $h_z, \underline{e}_t, \underline{h}_t, Z_e, Z_h$ per avere l'espressione generale del campo TE, basterà ricordare che in questo caso si ha

$\underline{E} = \underline{E}_t + \underline{z}_o E_z$ e $\underline{H} = \underline{H}_t + \underline{z}_o H_z$, con $E_Z = 0$, $\underline{E}_t = \underline{e}_t Z_e$, $\underline{H}_t = \underline{h}_t Z_h$, $H_t = h_z Z_e$

Vedremo in futuro come la diversità tra le onde ***TE***, ***TM*** e ***TEM*** si esplicherà solo nelle soluzioni del campo trasverso la legge di variazione del campo *e.m.* con z (ma anche il legame tra $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$) saranno sempre del tipo trovato nel caso ***TE***. Questa analogia ci permetterà di utilizzare per lo studio delle onde ***TE***, ***TM***, ***TEM*** nelle strutture guidanti il noto formalismo delle linee di trasmissione.

Il procedimento sviluppato per ricavare tutte le componenti di un campo ***TE*** non è il solo possibile: per gli stessi fini si può far ricorso ad esempio a un potenziale vettore magnetico $\underline{A}$, soddisfacente l'equazione delle onde del tipo particolare $\underline{A} = A_z(q_1, q_2, z)\underline{z}_o$ che in strutture a simmetria cilindrica si scompone come $\underline{A} = A_z(q_1, q_2, z)\,\underline{z}_o = T(q_1, q_2)\,L(z)\,\underline{z}_o$; in tal caso otterremo per L e T delle relazioni del tipo:

$$\frac{d^2L}{dz^2} = K_z^2\, L, \qquad \nabla_t^2 T = K_t^2\, T$$

Si può notare comunque che in pratica tale metodo viene a coincidere con quello da noi usato, ponendo $\underline{A} = A_z(q_1, q_2, z)\, \underline{z}_o = H_z(q_1, q_2, z)\, \underline{z}_o$, in cui è $H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2)\, Z_e(z)$ e pertanto $T(q_1, q_2) = h_z(q_1, q_2)$ e $L(z) = Z_e(z)$.

In altri termini si può dire che la componente longitudinale del campo magnetico $H_z\, \underline{z}_o$ (da cui abbiamo dedotto tutto il campo ***TE*** tramite h_z e Z_e) viene proprio a identificarsi con il potenziale vettore magnetico.

Può essere fatta ancora qualche considerazione sull'espressione analitica del campo ***TE***.

Con un procedimento diverso da quello già usato per ricavare le (3.18) è possibile giungere ad una formulazione in cui le componenti trasversali del campo elettrico e magnetico sono entrambe espresse esplicitamente in funzione $\nabla_t h_z$.

Infatti, moltiplicando vettorialmente per $\underline{z}_o$ (a sinistra) i due membri della quarta equazione delle (3.16) si ha:

$$-\underline{z}_o \times \left(\underline{z}_o \times \nabla_t h_z\right) - K_z \underline{z}_o \times \left(\underline{z}_o \times \underline{h}_t\right) = j\omega\varepsilon_c \left(\underline{z}_o \times \underline{e}_t\right)$$

che, per la nota espressione del doppio prodotto vettoriale, dà:

$$\nabla_t h_z + K_z \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c \left(\underline{z}_o \times \underline{e}_t\right)$$

Sostituendovi l'espressione di $\underline{z}_o \times \underline{e}_t$ ricavata dalla seconda delle (3.16), abbiamo:

$$\nabla_t h_z + K_z \underline{h}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z} \underline{h}_t \implies \nabla_t h_z = \left(-K_z - \frac{\omega^2 \mu \varepsilon_c}{K_z}\right) \underline{h}_t \implies \nabla_t h_z = \left(\frac{-K_z^2 + K^2}{K_z}\right) \underline{h}_t$$

$$\boxed{\underline{h}_t = \frac{K_z}{K_t^2} \nabla_t h_z}$$

Questa semplice relazione cui si è giunti, individua immediatamente il legame tra $\underline{h}_t$ e h_z; permettendoci di riformulare le equazioni sulle componenti *e.m.* trasversali:

$$\begin{cases} e_z = 0 \\ \underline{e}_t = -\dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\, \underline{z}_o \times \nabla_t h_z \\ \underline{h}_t = \dfrac{K_z}{K_t^2} \nabla_t h_z \\ \nabla_t^2 h_z = K_t^2\, h_z \end{cases} \qquad (3.19)$$

Valgono in margine alle (3.19) tutte quelle considerazioni fatte per le (3.18) esse, insieme alle (3.15) ci risolvono compiutamente il problema *e.m.* per un'onda ***TE***; in particolare con le (3.19) si ha l'opportunità di calcolare $\underline{h}_t$ senza dover necessariamente conoscere $\underline{e}_t$.

3.3 ONDE TM

Gli stessi procedimenti che ci hanno permesso di studiare il comportamento di un'onda ***TE*** possono essere ripetuti per un'onda ***TM***. Ciò consentirà innanzitutto di considerare ancora le componenti trasversali separatamente da quelle aventi la direzione di propagazione, che potremo ricondurre pertanto alla forma delle linee di trasmissione.

Le onde ***TM*** sono caratterizzate dal fatto di avere la componente del campo magnetico nella direzione longitudinale identicamente nulla ($H_z = 0$).

Ponendo come al solito $\underline{E} = \underline{E}_t + \underline{z}_o E_z$ e $\underline{H} = \underline{H}_t + \underline{z}_o H_z$, le equazioni di *Maxwell* (3.10) divengono in questo caso:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = j\omega\varepsilon_c\, E_z \underline{z}_o \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}_t \end{cases}$$

Assumendo per i campi trasversi ancora la forma:

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \end{cases}$$

il sistema precedente diviene:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \dfrac{dZ_e}{dz} \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu\, Z_h\, \underline{h}_t \\ Z_h\, \nabla_t \times\, \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c\, E_z \underline{z}_o \\ \dfrac{dZ_h}{dz} \underline{z}_o \times\, \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c Z_e \underline{e}_t \end{cases}$$

Dall'esame della terza equazione si deduce che la dipendenza da z di $E_z(q_1, q_2, z)$ è espressa dal termine $Z_h(z)$; così (analogamente a quanto avveniva per H_z nelle ***TE***) H_z può comporsi come segue:

$$H_z(q_1, q_2, z) = e_z(q_1, q_2)\, Z_h(z)$$

Con tale posizione il sistema precedente può riscriversi:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ -Z_h \underline{z}_o \times \nabla_t e_z + \dfrac{dZ_e}{dz} \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu\, Z_h\, \underline{h}_t \\ \nabla_t \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c\, e_z \underline{z}_o \\ \dfrac{dZ_h}{dz} \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c Z_e \underline{e}_t \end{cases}$$

Esaminando la quarta e seconda equazione si possono ancora ricavare delle relazioni di proporzionalità tra le componenti $Z_h(z)$ e $Z_e(z)$ già viste nella (3.15):

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e}{dz} = -K_z Z_h \\ \dfrac{dZ_h}{dz} = -K_z Z_e \end{cases} \qquad (3.20)$$

Tali equazioni, che forniscono la dipendenza del campo ***TM*** da z sostituite nel nostro sistema fanno avere:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ \underline{z}_o \times \nabla_t e_z + K_z \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu\, \underline{h}_t \\ \nabla_t \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c\, e_z \underline{z}_o \\ -K_z \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c \underline{e}_t \end{cases} \qquad (3.21)$$

Per ottenere le espressioni esplicite delle componenti trasverse, si consideri innanzitutto la seconda delle (3.21) che, moltiplicata vettorialmente (a sinistra) per $\underline{z}_o$, diviene:

$$-\nabla_t e_z - K_z\, \underline{e}_t = -j\omega\mu\, \underline{z}_o \times \underline{h}_t$$

e utilizzando la quarta equazione delle (3.21):

$$-\nabla_t e_z - K_z\, \underline{e}_t = -j\omega\mu\, \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z} \underline{e}_t \implies \nabla_t e_z = \left(-K_z + \frac{K^2}{K_z}\right) \underline{e}_t \implies \nabla_t e_z = \frac{K_t^2}{K_z} \underline{e}_t$$

$$\boxed{\underline{e}_t = \frac{K_z}{K_t^2} \nabla_t e_z} \qquad (3.21b)$$

Per quanto riguarda $\underline{h}_t$, dalla quarta delle (3.21), moltiplicata vettorialmente (a sinistra) per $\underline{z}_o$ si ha:

$$K_z \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c\ \underline{z}_o \times \underline{e}_t \implies \quad \underline{h}_t = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\ \underline{z}_o \times \underline{e}_t$$

Per il calcolo di $e_z(q_1,q_2)$, si ha infine dall'equazione delle onde per $E_z(q_1,q_2,z) = e_z(q_1,q_2)\,Z_h(z)$:

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = K^2 E_z \implies Z_h \nabla_t^2 e_z + e_z \frac{d^2 Z_h}{dz^2} = K^2 e_z Z_h \implies Z_h \nabla_t^2 e_z + \mathrm{K}_z^2 e_z Z_h = K^2 e_z Z_h$$
$$\implies \nabla_t^2 e_z = \mathrm{K}_t^2 e_z$$

Le componenti del campo ***TM***, funzioni delle coordinate trasversali possono allora riassumersi nel sistema di quattro equazioni:

$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \underline{h}_t = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_o \times \underline{e}_t = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{\mathrm{K}_t^2}\,\underline{z}_o \times \nabla_t e_z \\ \underline{e}_t = \dfrac{\mathrm{K}_z}{\mathrm{K}_t^2}\nabla_t e_z \\ \nabla_t^2 e_z = \mathrm{K}_t^2 e_z \end{cases} \tag{3.22}$$

Sul sistema (3.22) possono ripetersi considerazioni analoghe a quelle relative alle equazioni delle ***TE***: si può notare fra l'altro come le espressioni delle ***TM*** possano essere ricavate dalle ***TE***, tramite il principio di dualità. L'insieme delle (3.20) e (3.22) consente di risolvere il problema *e.m.* per le onde ***TM*** risolta la quarta delle (3.22) (con le condizioni al contorno stabilite dalla struttura guidante) si passa a ricavare $\underline{e}_t$, poi $\underline{h}_t$; con $Z_h(z)$ e $Z_e(z)$ si può infine risalire all'espressione generale del campo ***TM***.

L'analisi può essere sviluppata anche tramite un potenziale vettore elettrico del tipo:

$$\underline{A}_m = A_{mz}(q_1,q_2,z)\,\underline{z}_o = T(q_1,q_2)\,L(z)\,\underline{z}_o$$

in pratica si ha coincidenza di procedimenti, essendo

$$\underline{A}_m = E_z(q_1,q_2,z)\,\underline{z}_o = e_z(q_1,q_2)\,Z_h(z)\,\underline{z}_o$$

per le ***TM***, cioè, la componente longitudinale del campo elettrico $E_z(q_1,q_2,z)\,\underline{z}_o$ assume la funzione di potenziale vettore elettrico.

3.4 Onde TEM

Un campo ***TEM*** è caratterizzato dal fatto di non avere componenti nella direzione di propagazione ($H_z = E_z = 0$). Le equazioni di *Maxwell* divengono in questo caso:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases}$$

Utilizzando come al solito le condizioni sulla separabilità delle componenti del campo trasverso, avremo:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{h}_t = 0 \\ \dfrac{dZ_e}{dz}\, \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu\, Z_h\, \underline{h}_t \\ \dfrac{dZ_h}{dz}\, \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c Z_e\, \underline{e}_t \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si può ancora ricavare una relazione di proporzionalità tra Z_e e Z_h, analogamente al caso delle onde ***TE*** e ***TM***:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e}{dz} = -K_z Z_h \\ \dfrac{dZ_h}{dz} = -K_z Z_e \end{cases} \qquad (3.23)$$

Sostituite le relazioni (3.23) (che forniscono la dipendenza longitudinale del campo), il sistema ricavato dalle equazioni di *Maxwell* assume la forma:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{h}_t = 0 \\ K_z\, \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu\, \underline{h}_t \\ K_z\, \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c\, \underline{e}_t \end{cases} \qquad (3.24)$$

Dalla terza equazione delle (3.24) si può ricavare $\underline{e}_t$, moltiplicando vettorialmente per $\underline{z}_o$ ambo i membri:

$$K_z\, \underline{z}_o \times \left(\underline{z}_o \times \underline{e}_t\right) = j\omega\mu\, \left(\underline{z}_o \times \underline{h}_t\right) \Longrightarrow -K_z\, \underline{e}_t = -j\omega\mu\, \left(\underline{h}_t \times \underline{z}_o\right) \implies \underline{e}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z}\, \left(\underline{h}_t \times \underline{z}_o\right)$$

Dalla quarta equazione delle (3.24) otteniamo direttamente:

$$\underline{e}_t = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\, \left(\underline{h}_t \times \underline{z}_o\right)$$

Dovendo essere necessariamente uguali, dalle due espressioni trovate si ricava:

$$\frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c} = \frac{j\omega\mu}{K_z} \quad \Longrightarrow \quad K_z^2 = -\omega^2\mu\varepsilon_c = K^2$$

Questa interessante proprietà delle onde ***TEM*** può esprimersi anche sotto la forma:

$$K_t^2 = 0$$

Il sistema di equazioni (3.24) non è più sufficiente per conoscere direttamente le componenti trasversali del campo, venendo a coincidere tra loro la terza e la quarta equazione.

È opportuno riferirsi allora ad altre proprietà del campo *e.m.*, derivanti dalle equazioni di *Maxwell*; in particolare per le sorgenti del vettore *Induzione Elettrica* $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$, considerando una regione di spazio in cui si ha $\rho = 0$, risulta:

$$\nabla\underline{D} = 0$$

per cui possiamo scrivere:

$$\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\underline{z}_o\right) \cdot \left(\underline{E}_t + E_z\underline{z}_o\right) = 0$$

da cui otteniamo per l'onda ***TEM*** ($E_z \equiv 0, \underline{E}_t = Z_e\underline{e}_t \perp \underline{z}_o$):

$$\nabla_t\underline{e}_t = 0$$

$$\underline{E} = \underline{E}_t + \underline{z}_o E_z$$

Nel nostro caso $\underline{e}_t$, oltre ad essere solenoidale, è anche irrotazionale $\nabla_t \times \underline{e}_t = 0$; esso può allora ricavarsi dal gradiente di una funzione scalare $\Phi(q_1, q_2)$ "*potenziale*".

$$\underline{e}_t = -\nabla_t\Phi$$

La $\Phi(q_1, q_2)$, nel caso di insieme di esistenza a connessione (lineare) semplice, è definita a meno di una costante additiva; per connessione multipla vi sono situazioni in cui la Φ va considerata polidroma[7]. Per il momento supporremo $\Phi(q_1, q_2)$ di classe C^2 in un certo campo precisando ulteriori condizioni al contorno allorché ci riferiremo alle strutture guidanti.

Avendo $\underline{e}_t$ divergenza e rotore nullo potremo quindi scrivere:

$$\nabla_t\underline{e}_t = \nabla(-\nabla_t\Phi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_t^2\Phi = 0 \qquad (3.25)$$

[7] G. Gerosa: "*Appunti delle lezioni di Campi elettromagnetici*", 1981-82, edizione manoscritta a cura di AA.VV.: pag. 8

che è l'equazione di Laplace.

Va detto che un'espressione analoga alla (3.25) può ottenersi anche per il campo magnetico trasverso, anch'esso solenoidale e irrotazionale per onde ***TEM***; introducendo un potenziale scalare magnetico $\Psi(q_1, q_2)$ con le solite precisazioni, avremo:

$$\nabla_t \underline{h}_t = \nabla(-\nabla_t \Psi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_t^2 \Psi = 0 \qquad (3.26)$$

La determinazione di un'onda ***TEM*** può essere derivata indifferentemente dall'equazione di *Laplace* (3.25) o (3.26), qualora si consideri come incognita rispettivamente $\underline{e}_t$ o $\underline{h}_t$.

Risolta la (3.25) [(3.26)] con le opportune condizioni al contorno e ricavato $\underline{e}_t = -\nabla_t \Phi \ \ [\underline{h}_t = -\nabla_t \Psi]$ si passa a determinare $\underline{h}_t \ [\underline{e}_t]$ tramite la terza o quarta equazione delle (3.24) ; dalle (3.23) si calcolano le Z_e e Z_h, ottenendo così l'espressione completa di un campo ***TEM***.

4 IMPEDENZE D'ONDA.

Vogliamo ora fare qualche utile considerazione sul legame tra le componenti trasverse nei vari tipi di campi *e.m.*.

4.1 ONDE TE

In questo caso si era giunti all'espressione (3° espressione del sistema (3.18)):

$$\underline{h}_t = \frac{K_z}{j\omega\mu}\underline{z}_o \times \underline{e}_t \qquad (4.1)$$

Essa esprime la proprietà secondo la quale $\underline{e}_t, \underline{h}_t$ e $\underline{z}_o$ formano una terna rettangola destrogira (si tenga presente che ciò ha mero significato formale, essendo in genere $\underline{e}_t, \underline{h}_t$ vettori complessi); la relazione di proporzionalità tra $\underline{e}_t, \underline{h}_t$ è fornita dalla:

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{K_z} \qquad (4.2)$$

(*Le impedenze d'onda sono le relazioni di proporzionalità tra i campi elettrici ed i campi magnetici trasversi*) La Z_{TE} ha le dimensioni di un'impedenza, legando un campo elettrico ad uno magnetico (Nel sistema MKSA razionalizzato $\Omega = {\mathrm{Vm}^{-1}}/{\circ_{\mathrm{m}^{-1}}}$). Essa non dipende dalle coordinate (q_1, q_2, z) bensì dalle caratteristiche del mezzo in cui si ha propagazione e dalla forma della struttura guidante (che come si vedrà in futuro determina K_t^2 e quindi anche K_z).

Volendo stabilire delle vantaggiose analogie per lo studio del comportamento energetico di questi tipi di campi con quello delle linee di trasmissione, è opportuno riferirsi alle componenti trasversali $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ in particolari condizioni.

Come si è visto nella (3.11), i vettori $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ dipendono dalle coordinate secondo la legge

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \end{cases}$$

dove la dipendenza longitudinale poteva porsi nella forma:

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases} \qquad (4.3)$$

In cui P_1 e P_2 sono costanti in genere indeterminate, se riferite a strutture guidanti di lunghezza indefinita senza condizioni al contorno. Il valore di K_z si ricava dalla:

$$K_z^2 = K^2 - K_t^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c - K_t^2$$

dove l'insieme discreto dei valori di K_z si calcola (come si è avuto modo di accennare e si analizzerà dettagliatamente in seguito) allorché risultino note la forma e le dimensioni della struttura guidante. In genere si ha:

$$K_z = \pm\sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon_c - K_t^2}$$

risultando così una quantità solitamente complessa del tipo:

$$K_z = \pm(\alpha_z + j\beta_z)$$

(avendo indicato con: $\alpha_z = Re\{K_z\}$, $\beta_z = Im\{K_z\}$). Nel seguito per semplicità di trattazione ci riferiremo sempre alla radice positiva $K_z = +(\alpha_z + j\beta_z)$.

Fatte queste precisazioni, si può notare che la generica dipendenza longitudinale di $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ può essere schematizzata nella forma

$$\boxed{Z(z) = C_1\, e^{K_z z} + C_2\, e^{-K_z z}} \qquad (4.4)$$

La $Z(z)$ è la somma di due componenti, di cui la prima rappresenta un'onda propagantesi nel verso delle z negative $(-\underline{z}_0)$ e viene detta pertanto "*onda riflessa*"; la seconda descrive un'onda propagantesi nel verso delle z positive $(+\underline{z}_0)$ prendendo il nome di "*onda diretta*".

Infatti, il primo termine può scriversi:

$$C_1\, e^{K_z} = C_1\, e^{(\alpha_z + j\beta_z)\, z} = C_1\, e^{\alpha_z z} e^{j\beta_z z}$$

la grandezza nel dominio del tempo avrà la forma:

$$C_1\, e^{\alpha_z z}\, e^{j\beta_z z}\, e^{j\omega t} = C_1\, e^{\alpha_z z}\, e^{j(\omega t + \beta_z z)}$$

Perché si abbia fase costante per l'onda un osservatore deve muoversi con una velocità data da:

$$d(\omega t + \beta_z\, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega\, dt + \beta_z\, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta_z}$$

che rappresenta la velocità di fase nel verso delle z negative.

In modo analogo per il secondo termine della (4.4) si giunge ad una relazione per cui:

$$d(\omega t - \beta_z z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega\, dt - \beta_z\, dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta_z}$$

che rappresenta la velocità di fase nel verso delle z positive.

La convenzione di porre i generatori nelle linee di trasmissione nella zona delle $z \longrightarrow -\infty$ ha fatto sì che si desse il nome di onda diretta a quella proveniente dal generatore e di riflessa a quella che, dopo una riflessione si dirige verso il generatore.

Evidenziata questa proprietà per la (4.4) potremo esaminare i due casi distinti per il campo ***TE***:

- Esiste solo l'onda diretta ($C_1 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\begin{cases} Z_e(z) = \ P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = \ P_2\, e^{-K_z z} \end{cases}$$

per cui i campi trasversi assumono la forma:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = \ P_2\, e^{-K_z z}\, \underline{e}_t \\ \underline{H}_t = \ P_2\, e^{-K_z z}\, \underline{h}_t \end{cases} \qquad (4.5)$$

La relazione (4.1) moltiplicata vettorialmente a destra per $\underline{z}_0$ da:

$$\underline{e}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z} \underline{h}_t \times \underline{z}_0$$

sostituendovi le (4.5)

$$\underline{E}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z} \underline{H}_t \times \underline{z}_0 \qquad (4.6)$$

Questa espressione, valida per la sola onda diretta, mostra che $\underline{E}_t$, $\underline{H}_t$ e $\underline{z}_0$ formano una terna rettangola destrogira, potendosi altresì definire una costante di proporzionalità tra $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ che chiameremo impedenza d'onda ***TE*** (diretta):

$$Z_{TE}^{(+)} = \frac{j\omega\mu}{K_z} \qquad (4.7)$$

- Esiste solo l'onda riflessa ($C_2 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\begin{cases} Z_e(z) = \ P_1\, e^{K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} \end{cases}$$

per cui i campi trasversi assumono la forma:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = P_1\, e^{K_z z}\, \underline{e}_t \\ \underline{H}_t = -P_1\, e^{-K_z z}\, \underline{h}_t \end{cases}$$

La relazione (4.1) moltiplicata vettorialmente a destra per $\underline{z}_0$ e con le sostituzioni di $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ da:

$$\underline{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{K_z}\underline{H}_t \times \underline{z}_0 \qquad (4.8)$$

Questa espressione, valida per la sola onda riflessa, mostra che $\underline{E}_t$, $\underline{H}_t$ e $\underline{z}_0$ formano una terna rettangola levogira, assumendo per convenzione che la disposizione del campo *e.m.* non vari, definiremo una costante di proporzionalità tra $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ che chiameremo impedenza d'onda ***TE*** (riflessa):

$$Z_{TE}^{(-)} = -\frac{j\omega\mu}{K_z} \qquad (4.9)$$

Le impedenze d'onda $Z_{TE}^{(+)}$e $Z_{TE}^{(-)}$, oltre ad essere tipiche di una certa struttura guidante e del mezzo, vengono a dipendere anche dal verso di propagazione dell'onda. Ciò è collegato al fatto che il trasporto d'energia procede in versi opposti nel caso di onda diretta e riflessa (come può ricavarsi anche dall'espressione del vettore di *Poynting* $\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^*$, che cambia di segno variando la disposizione di $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ nelle due situazioni.

Può considerarsi pure un'impedenza d'onda in presenza contemporanea di onda diretta e riflessa, come legame di proporzionalità tra $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = \dfrac{j\omega\mu}{K_z}\left[\dfrac{P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}{-P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}\right]\underline{H}_t \times \underline{z}_0 \\ Z_{TE}^{(+)} = \dfrac{j\omega\mu}{K_z}\left[\dfrac{P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}{-P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}\right] \end{cases} \qquad (4.10)$$

In tal caso essa viene a perdere il fondamentale vantaggio di essere indipendente da z.

4.2 Onde TM

Considerazioni perfettamente analoghe al caso delle ***TE*** possono essere ripetute per quanto riguarda i campi ***TM***:

dalla seconda equazione delle (3.22) si ha:

$$\underline{h}_t = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_0 \times \underline{e}_t$$

ovvero moltiplicando vettorialmente per $\underline{z}_0$:

$$\underline{e}_t = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\underline{h}_t \times \underline{z}_0 \qquad (4.11)$$

con la costante avente le dimensioni ancora di una impedenza

$$Z_{TM} = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}$$

Facendo riferimento ai vettori $\underline{E}_t = \underline{e}_t\, Z_e$ e $\underline{H}_t = \underline{h}_t\, Z_h$ si possono ricavare le espressioni nel caso di onda diretta o riflessa, con procedimenti del tutto analoghi a quelli per le ***TE***:

- Esiste solo l'onda diretta ($C_1 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\underline{E}_t = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\underline{H}_t \times \underline{z}_0 \quad \Longrightarrow \quad Z_{TM}^{(+)} = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c} \qquad (4.12)$$

- Esiste solo l'onda riflessa ($C_2 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\underline{E}_t = -\frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\underline{H}_t \times \underline{z}_0 \quad \Longrightarrow \quad Z_{TM}^{(-)} = -\frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c} \qquad (4.13)$$

Nel caso generale (presenza contemporanea di onda riflessa e diretta) si può definire la:

$$Z_{TM}(z) = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\left[\frac{P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}{-P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}\right] \qquad (4.14)$$

Si noti l'interessante proprietà che lega le impedenze (4.10) e (4.14) in un mezzo dissipativo ($g \neq 0$) per lo stesso valore di K_z:

$$Z_{TM}(z)\, Z_{TE}(z) = \frac{\mu}{\varepsilon_c} = Z_m^2$$

cioè il prodotto delle impedenze è sempre costante ed uguale al quadrato dell'impedenza caratteristica del mezzo in cui avviene la propagazione. Per mezzi non dissipativi ($g = 0$) il prodotto vale μ/ε, e in particolare nel vuoto:

$$Z_{TM}(z)\, Z_{TE}(z) = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = Z_0^2$$

Dove $Z_o = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o} = 376.7\Omega$ è appunto l'impedenza caratteristica del vuoto.

4.3 ONDE TEM

Dalla terza e quarta equazione delle (3.24) si ricava:

$$\underline{e}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z}\underline{h}_t \times \underline{z}_0 \qquad oppure \qquad \underline{e}_t = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\underline{h}_t \times \underline{z}_0$$

Poiché per una ***TEM*** si ha $K_z^2 = K^2 = -\omega^2\,\mu\,\varepsilon_c \;\longrightarrow\; K_z = \pm j\omega\sqrt{\mu\,\varepsilon_c}$ scegliendo la radice positiva, da entrambe le relazioni precedenti discende:

$$\underline{e}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}\underline{h}_t \times \underline{z}_0 \qquad (4.15)$$

Si noti che la costante di proporzionalità dipende solamente dalle caratteristiche del messo di propagazione (e non più dalla forma della struttura guidante) ed ha le dimensioni di un'impedenza (risulta essere l'impedenza caratteristica del mezzo)

$$Z_{TEM}(z) \;= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = Z_m \qquad (4.16)$$

Nei casi particolari di mezzo non dissipativo o addirittura di propagazione nel vuoto si ottengono, per l'impedenza caratteristica, le forme già viste in precedenza. Queste impedenze sono tra l'altro quelle proprie delle *Onde Piane Uniformi*.

Facendo riferimento ai vettori $\underline{E}_t = \underline{e}_t\, Z_e$ e $\underline{H}_t = \underline{h}_t\, Z_h$ potremo ancora trovare le espressioni nel caso di onda diretta e riflessa:

- Esiste solo l'onda diretta ($C_1 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\underline{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}\;\underline{H}_t \times \underline{z}_o \quad \Rightarrow \quad Z_{TEM}^{(+)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = Z_m$$

- Esiste solo l'onda riflessa ($C_2 = 0$). In tale situazione si ha:

$$\underline{E}_t = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}\;\underline{H}_t \times \underline{z}_o \quad \Rightarrow \quad Z_{TEM}^{(-)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = -Z_m$$

Nel caso generale (presenza contemporanea di onda riflessa e diretta) si può definire la:

$$Z_{TEM}(z) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}\left[\frac{P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}{-P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z}}\right]$$

Nella letteratura, talvolta, l'impedenza $Z_{TE}(z)$ viene indicata con Z_h e la $Z_{TM}(z)$ con Z_e; ciò è dovuto al fatto che i campi ***TE*** sono chiamati anche *"onde H"*, considerando che l'unica componente presente lungo la direzione di propagazione è quella magnetica. Per lo stesso motivo i campi ***TM*** vengono chiamati *"onde E"*. Qui non si è seguito tale standard per non generare confusione con le dipendenze longitudinali dei vettori $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ da noi espresso come $Z_e(z)$ e $Z_h(z)$.

È spesso utile considerare le grandezze inverse delle impedenze d'onda, che saranno generalmente delle "*ammettenze d'onda*". Avremo in particolare che:

$$\begin{cases} Y_{TE}^{(\pm)} = \dfrac{1}{Z_{TE}^{(\pm)}} = \pm\dfrac{K_z}{j\omega\mu} \\ Y_{TM}^{(\pm)} = \dfrac{1}{Z_{TM}^{(\pm)}} = \pm\dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z} \\ Y_{TEM}^{(\pm)} = \dfrac{1}{Z_{TEM}^{(\pm)}} = \pm\sqrt{\dfrac{\varepsilon_c}{\mu}} = \pm Y_m \end{cases} \qquad (4.17)$$

A conclusione dell'esame generale dei vari tipi di onde *e.m.* in guide a simmetria cilindrica, vogliamo riportare un sintetico formulario che riassuma le espressioni più significative fin qui trovate.

- Equazioni di *Maxwell* [8]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{D} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\,\underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = -j\omega\varepsilon_c\,\underline{E} \end{cases}$$

con $\underline{D} = \varepsilon\,\underline{E}$, $\underline{B} = \mu\,\underline{H}$, $\varepsilon_c = \varepsilon - j\dfrac{g}{\omega}$

- Principio di *Dualità*

$$\underline{E} \longrightarrow \underline{H} \qquad \underline{H} \longrightarrow -\underline{E} \qquad \mu \longrightarrow \varepsilon_c \qquad \varepsilon_c \longrightarrow \mu$$

- Equazioni delle onde per il campo *e.m.*

$$\begin{cases} \nabla^2\underline{E} = K^2\,\underline{E} \\ \nabla^2\underline{H} = K^2\,\underline{H} \end{cases}$$

[8] In regime armonico, in regione esterna alle sorgenti di campi *e.m.* e in mezzo omogeneo ed isotropo.

Con $K^2 = -\omega^2 \mu\, \varepsilon_c$

- Separazione trasverso-longitudinale degli operatori e del campo *e.m.*

$$\begin{cases} \nabla(\cdot) = \nabla_t(\cdot) + \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ \nabla^2(\cdot) = \nabla_t^2(\cdot) + \dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t + \underline{z}_0\, E_z \\ \underline{H} = \underline{H}_t + \underline{z}_0\, H_z \end{cases}$$

- Espressione delle componenti trasversali del campo *e.m.*

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \end{cases}$$

4.4 Onde TE ($\boldsymbol{E_z = 0}$)

- Equazioni di *Maxwell* particolareggiate:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\, H_z\, \underline{z}_o \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t H_z + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases}$$

- Espressione della componente longitudinale di $\underline{H}$:

$$H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2)\, Z_e(z)$$

- Componenti longitudinali del campo:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h \\ \dfrac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases}$$

- Componenti trasversali del campo:

$$\begin{cases} e_z = 0 \\ \underline{e}_t = -\dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\, \underline{z}_o \times \nabla_t h_z \\ \underline{h}_t = \dfrac{K_z}{j\omega\mu}\, \underline{z}_o \times \underline{e}_t \\ \nabla_t^2\, h_z = K_t^2\, h_z \end{cases}$$

Con $K^2 = K_z^2 + K_t^2$

- Impedenza d'onda:

$$Z_{TE}^{(\pm)} = \pm\frac{j\omega\mu}{K_z}$$

4.5 Onde TM ($\boldsymbol{H_z = 0}$)

- Equazioni di *Maxwell* particolareggiate:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = j\omega\varepsilon_c\, E_z\, \underline{z}_0 \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases}$$

- Espressione della componente longitudinale di $\underline{E}$:

$$E_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2)\, Z_h(z)$$

- Componenti longitudinali del campo:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h \\ \dfrac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases}$$

- Componenti trasversali del campo:

$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \underline{h}_t = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_o \times \underline{e}_t = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2}\underline{z}_o \times \nabla_t e_z \\ \underline{e}_t = \dfrac{K_z}{K_t^2}\nabla_t e_z \\ \nabla_t^2\, e_z = K_t^2\, e_z \end{cases}$$

Con $K^2 = K_z^2 + K_t^2$

- Impedenza d'onda:

$$Z_{TM}^{(\pm)} = \pm\frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}$$

4.6 Onde TEM ($\boldsymbol{H_z = E_z = 0}$)

- Equazioni di *Maxwell* particolareggiate**:**

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\, \underline{H}_t \\ \underline{z}_o \times \dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c\, \underline{E}_t \end{cases}$$

- Espressione di K_z:

$$K_z^2 = -\omega^2\, \mu\, \varepsilon_c = K^2 \quad \longrightarrow \quad K_z = \pm j\omega\sqrt{\mu\, \varepsilon_c}$$

- Componenti longitudinali del campo:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h \\ \dfrac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases}$$

- Componenti trasversali del campo:

$$\begin{cases} e_z = 0 \\ h_z = 0 \\ \underline{e}_t = \dfrac{j\omega\mu}{K_z}\, \underline{h}_t \times \underline{z}_o = \dfrac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\, \underline{h}_t \times \underline{z}_o = -\nabla_t \Phi \\ \underline{h}_t = \dfrac{K_z}{j\omega\mu} \underline{z}_o \times \underline{e}_t = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z} \underline{z}_o \times \underline{e}_t \end{cases}$$

Con $\nabla_t^2 \Phi = 0$

- Impedenza d'onda:

$$Z_{TEM}^{(\pm)}(z) = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \pm Z_m$$

Con

$$Z_{TM}^{(\pm)} Z_{TE}^{(\pm)} = \left[Z_{TEM}^{(\pm)}\right]^2 = \frac{\mu}{\varepsilon_c} = Z_m^2$$

5 ONDE IN STRUTTURE GUIDANTI.

Vogliamo ora esaminare la particolare espressione che assumono i vari tipi di campi *e.m.* studiati in strutture guidanti, con tutte le proprietà che ne derivano. Prendiamo in considerazione una generica struttura a simmetria cilindrica e fissiamo il solito sistema di riferimento ortogonale destro (q_1, q_2, z).

È opportuno introdurre a questo punto alcune ipotesi semplificative.

Diremo che una struttura è perfettamente conduttrice dal punto elettrico quando la sua conduttanza $g = \infty$ (***PEI*** - *Parete Elettrica Ideale*). Sulla parete di una ***PEI*** abbiamo che il campo elettrico è diretto normalmente ad essa ed il campo magnetico è tangenziale (figura 5.1), (sulla superficie ***PEI*** valgono le $\underline{n} \times \underline{E} = 0$, $\underline{n} \cdot \underline{H} = 0$).

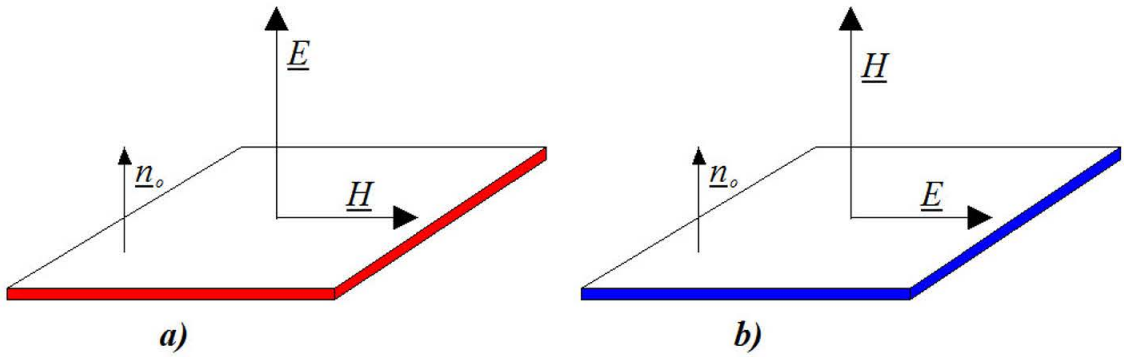


Figura 5.1 - Superfici ideali a) PEI b) PMI.

Indicando con "τ" ed "n" rispettivamente le componenti tangenziali e normali alla superficie, possiamo scrivere:

$$\text{PEI} \quad \begin{cases} E_\tau = 0 \\ H_n = 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

Su una superficie di discontinuità tra due mezzi "1" e "2" si ha infatti $\underline{n}_o \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = 0$, $\underline{n}_o \cdot (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) = 0$ che esprimono la continuità della componente tangenziale di $\underline{E}$ e di quella normale di $\underline{B}$. Essendo nullo, all'interno di un conduttore (elettrico) perfetto, il campo elettrico, segue che[9]:

$$\underline{n}_o \times \underline{E} = 0 \implies E_\tau = 0$$

$$\underline{n}_o \cdot \underline{B} = 0 \implies H_n = 0$$

[9] Cfr. Barziali: Op.cit., Pagg. 65÷71 o anche R. Collin: "*Fundations for microwave engineering*", Mc Graw-Hill, Pagg. 34÷37.

Per il principio di dualità avremo una struttura perfettamente conduttrice dal punto di vista magnetico (***PMI***) qualora il campo magnetico sia diretto normalmente alla superficie e quello elettrico tangenzialmente. Con le stesso notazioni:

$$\text{PMI} \quad \begin{cases} H_\tau = 0 \\ E_n = 0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

In entrambi i casi è possibile osservare che il vettore di *Poynting* è sempre tangente alla superficie; la ***PEI*** e la ***PMI*** manifestano dal lato energetico (flusso di potenza *e.m.*) le stesse proprietà guidanti. Precisiamo ora quali sono, relativamente ai vari tipi di onda, le condizioni al contorno implicate dalla presenza di strutture guidanti di tipo ***PEI*** (analoghe considerazioni varrebbero nel caso duale ***PMI***).

In particolare, ci riferiremo ad una guida d'onda a simmetria cilindrica: in pratica abbiamo un supporto metallico ad elevata conducibilità (da noi supposta per semplicità infinita) nel cui interno viene posto un dielettrico. (figura 5.2)

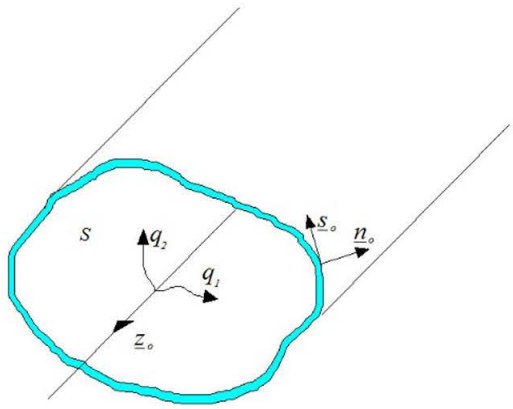


Figura 5.2 - Guida d'onda a simmetria cilindrica PEI, riferita a un sistema di coordinate cilindriche generalizzate ortogonali q_1, q_2, z. S è la generica sezione trasversale della guida, rappresentata da un dominio semplicemente connesso, la cui frontiera è indicata con "s"; s_o è il versore tangente al bordo s, no è il versore normale al bordo s (diretto esternamente alla sezione S) tale che $\underline{n}_o \times \underline{s}_o = \underline{z}_o$

La sua sezione trasversale S è di forma qualsiasi ma sempre semplicemente connessa ed il suo contorno s sarà costituito perciò da una sola linea chiusa.

Vogliamo subito evidenziare il fatto che la trattazione che esporremo per ricavare le condizioni sulle onde ***TE*** e ***TM***, rimane perfettamente valida anche per strutture con sezioni a connessione lineare non semplice (es. cavi coassiali, linee a striscia, etc.) mentre ciò non avviene, come si vedrà, per le ***TEM***.

5.1 ONDE TE

Con riferimento alle notazioni della figura 5.2 deve aversi, per ogni sezione $S, E_\tau = 0$ sul contorno s (componente tangenziale sempre nulla sul mantello metallico perfettamente conduttore). Essendo sempre $E_z = 0$ la condizione precedente si esplica nella relazione bidimensionale:

$$\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \quad su \quad s$$

Dalla $H_n = 0$, essendo sempre $H_z, \underline{z}_o$ sempre normale a $\underline{n}_o$, deriva:

$$\underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \quad su \quad s$$

Per un'onda ***TE*** in una ***PEI*** deve essere al contempo:

$$\begin{cases} \underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \\ \underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \end{cases} \quad su \quad s \qquad (3,3)$$

Ricordando l'espressione di $\underline{e}_t$ per un ***TE***, la prima delle (5.3) diviene:

$$\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = -\frac{j\omega\mu}{K_t^2} \left(\underline{z}_o \times \nabla_t h_z\right) \cdot \underline{s}_o = 0$$

Dalla nota identità vettoriale $\underline{A} \times \underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{C} \times \underline{A} \cdot \underline{B}$ si ha

$$\left(\underline{s}_o \times \underline{z}_o\right) \cdot \nabla_t h_z = 0 \implies \underline{n}_o \cdot \nabla_t h_z = 0$$

Poiché il prodotto scalare tra un gradiente di una funzione ed un versore equivale alla derivata della funzione secondo la direzione del versore, avremo:

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad su \quad s$$

La seconda delle (5.3) fornisce le stesse conclusioni;

$$\underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = \frac{K_z}{K_t^2} \nabla_t h_z \cdot \underline{n}_o = 0 \implies \frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad su \quad s$$

Quindi, in definitiva, un modo ***TE*** in una struttura ***PEI*** impone sul campo lungo la curva s la relazione:

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad su \quad s \qquad (5.4)$$

5.2 ONDE TM

In questo caso la $\underline{E}_\tau = 0$ impone una condizione sia sulla componente trasversale sia sulla longitudinale: per la prima e:

$$\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \qquad su\ s$$

per la seconda deve aversi su tutto il mantello cilindrico:

$$E_z\, \underline{z}_o = 0 \implies e_z(q_1, q_2)\, Z_h(z)\, \underline{z}_o = 0 \implies e_z(q_1, q_2) = 0 \qquad su\ s$$

(la condizione $Z_h(z) = 0$ implicherebbe l'annullamento del campo ***TM*** per ogni z).

Dalla $H_n = 0$ segue, essendo già nullo H_z:

$$\underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \quad su\ s$$

Per un'onda ***TM*** in una ***PEI*** deve cioè aversi:

$$\begin{cases} \underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \\ e_z = 0 \\ \underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \end{cases} \quad su\ s \qquad (5.5)$$

La prima delle (5.5) per l'espressione di $\underline{e}_t$ in una ***TM*** diventa:

$$\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = \frac{K_z}{K_t^2} \nabla_t e_z \cdot \underline{s}_o = 0 \qquad \implies \frac{\partial e_z}{\partial s} = 0 \quad su \quad s$$

risultato già implicito nella seconda delle (5.5). Stesse conclusioni si ricavano dalla terza delle (5.5), infatti:

$$\underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2} \left(\underline{z}_o \times \nabla_t e_z\right) \cdot \underline{n}_o = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2} \left(\underline{n}_o \times \underline{z}_o\right) \cdot \nabla_t e_z = -\frac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2} \underline{s}_o \cdot \nabla_t e_z = 0 \qquad \implies \frac{\partial e_z}{\partial s}$$
$$= 0 \quad su \quad s$$

Tutto ciò può riassumersi dicendo che un'onda ***TM*** in una struttura ***PEI*** impone sul campo la condizione al contorno:

$$e_z = 0 \quad su\ s \qquad (5.6)$$

5.3 ONDE TEM

Dalla $\underline{E}_\tau = 0$ scaturisce ancora ($E_z = 0$) e:

$$\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \quad su \quad s$$

Mentre dalla $H_n = 0$ si deduce ($H_z = 0$ non influisce qui):

$$\underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \quad su \quad s$$

per una ***TEM*** si hanno le medesime condizioni al contorno generali viste per un'onda ***TE*** (anche se implicazioni saranno diverse):

$$\begin{cases} \underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0 \\ \underline{h}_t \cdot \underline{n}_o = 0 \end{cases} \quad su \quad s \qquad (5.7)$$

Dalla prima equazione delle (5.7) si ottiene:

$$-\nabla_t \Phi \cdot \underline{s}_o = 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad su \quad s$$

mentre dalla seconda si ricava:

$$-\frac{K_z}{j\omega\mu} z_0 \times \nabla_t \Phi \cdot \underline{n}_o = 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad su \quad s$$

Quindi in una ***TEM*** le condizioni al contorno imposte dalle superfici ***PEI*** implicano che:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad su \quad s \qquad (5.8)$$

Dalla (5.8) deriva che $\Phi(q_1, q_2)$ è costante su s. D'altra parte, $\Phi(q_1, q_2)$ risulta essere soluzione dell'equazione di *Laplace* $\nabla_t^2 \Phi = 0$ e come tale deve godere della tipica proprietà di assumere i valori massimi e minimi sulla frontiera del dominio di definizione. Essendo, nel nostro caso, $\Phi(q_1, q_2)$ definita su una generica sezione S a connessione semplice avente come frontiera il bordo s, la condizione trovata $\Phi(q_1, q_2) = k$ su s, implica allora che la $\Phi(q_1, q_2) = k$ su tutta la sezione trasversale S.

l'affermazione fatta poc'anzi può essere dimostrata in più modi; un primo modo può essere basato sull'applicazione del lemma di *Green* in due dimensioni:

in un dominio regolare S del piano (q_1, q_2) si può scrivere [10]:

$$\int_S \nabla_t (X \, \nabla_t Y) \, dS = \oint_{+s} X \, \nabla_t Y \cdot \underline{n}_o \, ds = \int_S (\nabla_t X \; \nabla_t Y + X \nabla_t^2 \mathrm{Y}) \, dS \implies$$

[10] Cfr.: Ghizzetti-Rosati: "*Lezioni di analisi matematica*", vol. 2, ed Veschi, 3 ed. Pagg. 216÷219

$$\Longrightarrow \oint_{+s} X \frac{\partial Y}{\partial n}\, ds = \int_S (\nabla_t X \ \nabla_t Y + X\nabla_t^2 \mathrm{Y})\, dS$$

ponendo: $Y = (\Phi - \Phi_0)$ e $X = (\Phi - \Phi_0)^*$, dove Φ_0 è il valore costante su s, sia ha che X e Y sono entrambe nulle su S e l'integrale curvilineo è uguale a zero. Pertanto:

$$\int_S (\nabla_t X \ \nabla_t Y + X\nabla_t^2 \mathrm{Y})\, dS = 0$$

Si ha inoltre $\nabla_t X = \nabla_t(\Phi - \Phi_0)^* = \nabla_t \Phi^*$ e $\nabla_t Y = \nabla_t(\Phi - \Phi_0) = \nabla_t \Phi$ e dovendo poi essere (*Laplace*) $\nabla_t^2 \mathrm{Y} = \nabla_t^2 \Phi = 0$, possiamo scrivere:

$$\int_S (\nabla_t \Phi \ \ \nabla_t \Phi^*)\, dS = \int_S |\nabla_t \Phi|^2\, dS = 0$$

La funzione integranda è sempre non negativa e l'ultima relazione implica che $\nabla_t \Phi = 0$ su tutta la S (quindi Φ costante su tutta S).

Una dimostrazione alternativa è quella puramente analitica: essa è basata sull'estensione della dimostrazione di un teorema sull'unicità della soluzione del problema di *Dirichlet* per l'equazione di *Laplace*. Si dimostra[11] che "*una funzione* u(x,y) *armonica regolare in* D *e nulla su* ∂D*, è necessariamente nulla in tutto* D".

Tutto ciò è ovviamente valido per la nostra $\Phi(q_1, q_2)$, soddisfacente l'equazione di Laplace nel dominio S, di classe C^2 sempre in S e almeno continua su $\partial S = s$. Quanto detto può essere ampliato al caso in cui la Φ risulti costante genericamente su S (con valore Φ_0 eventualmente diverso da zero). Infatti, la dimostrazione in 29.4.I può essere ripetuta perfettamente, con la sola modifica di considerare al posto della $\nu(x,y) = \frac{u(x,y)}{\omega(x,y)} = \frac{\Phi(x,y)}{\omega(x,y)}$ una funzione del tipo $\nu(x,y) = \frac{[\Phi(x,y) - \Phi_0]}{\omega(x,y)}$. Il risultato è sempre quello di avere una $\nu(x,y)$ nulla in tutto S (e ciò si vede ancora per assurdo) da cui se ne ricava:

$$\Phi(x,y) = \Phi_0 \quad in\ tutto\ S$$

(quanto dimostrato è ovviamente indipendente dalla scelta delle coordinate q_1, q_2)

La $\Phi(q_1, q_2)$ costante su tutto S, implica $\nabla_t \Phi = 0$, da cui:

---

[11] Cfr.: Ghizzetti-Rosati: "*Lezioni di analisi matematica*", vol. 2, ed Veschi, 3 ed. Teorema 29.4.I

$$\begin{cases} \underline{e}_t = 0 \\ \underline{h}_t = 0 \end{cases}$$

essendo già $E_z = H_z = 0$ si arriva all'unica soluzione banale di campo *e.m.* ovunque nullo (di nessun interesse fisico). *Pertanto, in un guida d'onda (**PEI** a sezione semplicemente connessa) non possono propagarsi onde TEM.*

Ciò non significa però che non è possibile convogliare energia in forma di onde TEM in tutte le strutture guidanti, infatti in strutture con sezione a connessione multipla (quelle cioè non formate da un solo conduttore) la condizione Φ costante sui bordi non implica affatto che lo sia su tutta S. Si possono quindi avere campi TEM nel caso, ad esempio, del cavo coassiale o delle linee a struscia. In strutture non semplicemente connesse la condizione del modo ***TEM*** $\partial\Phi/\partial s$ su s implica che Φ può assumere valori costanti su ognuna delle due linee chiuse, ma tali valori possono essere in genere diversi tra loro. Quindi, dato che il lemma di *Green* non è più nullo, viene a cadere il ragionamento fatto per superfici semplicemente connesse.

6 PROBLEMA DELLA DETERMINAZIONE DEI MODI.

6.1 TEORIA

Si è visto come, in una guida d'onda ideale (***PEI***) sia possibile ricavare l'espressione di un campo ***TE*** o ***TM*** attraverso la risoluzione di un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, scalare, omogenea, del tipo:

$$\nabla_t^2 \mathrm{T} = K_t^2 \mathrm{T} \qquad \text{(Helmholtz)} \qquad (6.1)$$

Con $K_t^2 + K_z^2 = K^2 = -\omega^2 \mu\, \varepsilon_c$ in cui è:

$$\begin{cases} T = h_z(q_1, q_2) \Longrightarrow TE \\ T = e_z(q_1, q_2) \Longrightarrow TM \end{cases} \qquad (6.2)$$

Per arrivare ad una soluzione delle (6.2) vanno imposte le condizioni al contorno per guide ***PEI*** che assumono la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad su \;\; s \;\; \Longrightarrow TE \\ e_z = 0 \quad su \;\; s \;\; \Longrightarrow TM \end{cases} \qquad (6.3)$$

Queste stesse condizioni, in relazione alla particolare forma e dimensione della sezione della struttura guidante, determinano i valori di K_t^2. vedremo che in tutti i casi che ci interessano K_t^2 può assumere un'infinità numerabile di valori, che vengono chiamati "*autovalori*" dell'equazione differenziale (6.1). Per ogni autovalore otterremo una soluzione della "*equazione differenziale agli autovalori*" detta anche "*autofunzione*" che determinerà la configurazione longitudinale dei campi (h_z o e_z) a meno di una costante moltiplicativa [infatti la (6.1) è omogenea]. Determinato il campo longitudinale di ricava l'intero campo *e.m.* in base alle relazioni del capitolo 2 derivate dalle equazioni di *Maxwell*.

Il campo *e.m.* associato a ciascun autovalore viene detto "*modo*" di propagazione: per quanto detto precedentemente, in una guida d'onda ***PEI*** a simmetria cilindrica si ha un'infinità numerabile di modi ***TE*** e ***TM*** (mentre non esistono modi ***TEM***).

Lo studio sistematico delle proprietà dell'equazione (6.1), relativamente alle condizioni al contorno, può essere efficacemente affrontato e semplificato

riferendoci a concetti e definizioni propri dell'algebra e dell'analisi funzionale (ciò giustifica fra l'altro l'uso di termini quali "*autovalori*" e "*autofunzioni*")[12].

Sintetizzando gli aspetti fondamentali del problema si può vedere che le "*autofunzioni*" $T(q_1, q_2)$, soluzioni della (6.1), soddisfacendo ipotesi molto generali, appartengono allo spazio L^2: questo spazio vettoriale (di *Hilbert*) è costituito infatti da elementi che sono funzioni $f(p)$ (reali o complesse) misurabili secondo *Lebesgue* in un dato insieme E (anch'esso misurabile secondo *Lebesgue*) e tali che $|f(p)|^2$ risulti sommabile in E; in tale spazio (definito sul campo dei numeri complessi) si definisce un "*prodotto scalare*" ponendo:

$$(f, g) = \int_E f(p) \cdot g^*(p)\ d\tau = \langle f, g \rangle$$

La (6.1) può allora ricondursi ad un "*problema di autovalori*" definito da un'equazione del tipo $LT = \lambda T$; in cui nel nostro caso: T è una autofunzione $\in L^2$ (non identicamente nulla) associata a $\lambda = K_t^2$, cioè gli autovalori del problema determinabili in relazione a $L = \nabla_t^2$, che è l'operatore (cioè una trasformazione tra uno spazio di funzioni a un altro spazio ancora costituito da funzioni).

Le condizioni al contorno (del tipo (6.3)) definiscono il "*dominio*" dell'operatore ∇_t^2 (Cioè l'insieme delle funzioni cui può applicarsi L)

Si può dimostrare che ∇_t^2, per campi ***TE*** e ***TM***, è un "*operatore autoaggiunto*", cioè $(\nabla_t^2 f, g) = (f, \nabla_t^2 g)\ \ \forall f, g \in L^2$ e "*definito negativo*", cioè $(\nabla_t^2 f, f) < 0\ \ \forall f \in L^2$.

Ciò implica importanti conseguenze (derivanti dalle proprietà algebriche): in particolare gli autovalori $\lambda = K_t^2$ risultano essere reali e negativi; le autofunzioni, relative ad autovalori diversi, sono ortogonali tra loro (prodotto scalare sempre nullo); inoltre i K_t^2 sono un'infinità numerabile ed ordinabile in maniera crescente (in modulo), in oltre vale la proprietà $\lim_{n\to\infty} \left|K_{t_n}^2\right| = +\infty$ (lemma di *Rellich*) ; il relativo sistema di autofunzioni T_i (ortogonali) è completo

$$\left(\forall f(p) \in L^2(e), \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, m, c_1, c_2, \dots, \frac{c_m}{\left\| f(p) - \sum_{i=1}^{m} c_i T_i \right\|} < \varepsilon \right)$$

---

[12] Ghizzetti - Mazzarella - Ossicini "*Lezioni di Complementi di Matematica*" 1 Ed. Veschi, 1981 Cap. 3, § 1÷5
Cattaneo - Gasparini "*Strutture algebriche - Operatori lineari*" Ed. Veschi 1977 Cap 5 § 1, Cap. 7 § 1,3,9,14,16,17

è possibile in altre parole, approssimare ad libitum una data funzione $f(p)$ (soddisfacente le condizioni tipiche per ***TE*** o ***TM***) con una combinazione lineare delle sue autofunzioni, troncata all'm-esimo termine (i coefficienti c_i che vanno determinati, prendono il nome di "*coefficienti di Fourier*")[13]

Dimostriamo che in una guida d'onda ideale (***PEI***) si ha che il generico K_t^2 (per modi ***TE***, ***TM***) è una quantità reale negativa.

In relazione al solito sistema di riferimento scriviamo il Lemma di *Green* in due dimensioni:

$$\int_S \nabla_t(X\,\nabla_t Y)\;dS = \oint_{+S} X\,\nabla_t Y\cdot \underline{n}_o\,ds = \int_S (\nabla_t X\;\nabla_t Y + X\nabla_t^2 \mathrm{Y})\,dS \implies$$

$$\implies \oint_{+S} X\,\frac{\partial Y}{\partial n}\,ds = \int_S (\nabla_t X\;\nabla_t Y + X\nabla_t^2 \mathrm{Y})\,dS$$

6.2 Caso di Onde TM:

Se poniamo $X = e_z(q_1,q_2), Y = e_z^*(q_1,q_2)$ il Lemma di *Green* diviene:

$$\oint_{+S} e_z\,\frac{\partial e_z^*}{\partial n}\,ds = \int_S (\nabla_t e_z\;\nabla_t e_z^* + e_z\nabla_t^2 e_z^*)\,dS \qquad (6.4)$$

applicando la nota condizione al contorno per le onde ***TM*** ($e_z = 0\;\; su\; s$) si annulla l'integrale a primo membro, per cui:

$$\int_S (\nabla_t e_z\;\nabla_t e_z^* + e_z\nabla_t^2 e_z^*)\,dS = \int_S |\nabla_t e_z|^2 dS + \int_S e_z\nabla_t^2 e_z^*\,dS \qquad (6.5)$$

Inoltre dall'equazione di *Helmholtz* si ha che $\nabla_t^2 e_z = K_t^2 e_z \implies (\nabla_t^2 e_z)^* = (K_t^2 e_z)^* \implies \nabla_t^2 e_z^* = {K_t^2}^* e_z^*$ quindi la (6.5) diviene:

$$\int_S |\nabla_t e_z|^2 dS = -\int_S e_z\,{K_t^2}^* e_z^*\,dS = -{K_t^2}^* \int_S |e_z|^2\,dS$$

$$K_t^{2*} = -\frac{\int_S |\nabla_t e_z|^2 dS}{\int_S |e_z|^2\,dS} = K_t^2 \qquad (6.6)$$

[13] Per una trattazione più esauriente dell'argomento si rimanda al G. Gerosa "*Appunti di campi elettromagnetici*" pagg. 197-207.

Nell'espressione ottenuta per K_t^2, l'integrale a denominatore fornisce un contributo certamente reale e positivo (se $e_z = 0$ su tutta la superficie S si avrebbe l'annullamento dell'intero campo *e.m.*) ; stesse considerazioni valgono per l'integrale a numeratore (reale e positivo) in quanto se fosse $|\nabla_t e_z| = 0$ su tutto S, cioè e_z costante su S, ne deriverebbe necessariamente (dovendosi soddisfare la condizione al contorno $e_z = 0$ su s) $e_z = 0$ su tutta la superficie S che è equivalente al completo annullamento del campo.

$K_t^{2^*}$ risulta perciò reale negativo, venendo a coincidere con il generico autovalore K_t^2.

6.3 CASO DI ONDE TE:

Sempre nel Lemma di *Green* poniamo $Y = h_z(q_1, q_2), X = h_z^*(q_1, q_2)$

$$\oint_{+S} h_z^* \frac{\partial h_z}{\partial n}\, ds = \int_S (\nabla_t h_z \ \nabla_t h_z^* + h_z^* \nabla_t^2 h_z)\, dS \qquad (6.7)$$

dalle condizioni al contorno per le onde ***TE*** ($\partial h_z/\partial n = 0$ su s) e dall'equazione di *Helmholtz* $\nabla_t^2 h_z = K_t^2 h_z$ deriviamo:

$$\int_S |\nabla_t h_z|^2 dS + K_t^2 \int_S |h_z|^2\, dS = 0$$

$$K_t^2 = -\frac{\int_S |\nabla_t h_z|^2 dS}{\int_S |h_z|^2\, dS} \qquad (6.8)$$

Nell'espressione di K_t^2 l'integrale a denominatore è reale e positivo, infatti $h_z = 0$ su S annullerebbe tutto il campo; al numeratore l'integrale è in genere non negativo, potendosi avere $\nabla_t h_z = 0$ su S equivalente a $h_z = k$ su S (si noti che non è in contrasto con la $\partial h_z/\partial n = 0$ su s) in corrispondenza a questo caso avremo $K_t^2 = 0$.

Ma la $h_z = k$ su S da luogo a campi in cui è presente la sola componente magnetica longitudinale $H_z \underline{z}_0 = h_z Z_e \underline{z}_0$ (tutte le altre componenti del campo sono identicamente nulle). Questa particolare soluzione ***TE*** è di scarso interesse pratico e perciò può pensarsi di escludere tutte e solo le funzioni $h_z = k$ su S. Allora K_t^2 risulterà ancora reale negativo.

È importante ricordare che il risultato ottenuto per K_t^2 (con tutte le conseguenze che ne derivano) è valido nel caso di guida d'onda perfettamente conduttrice

($g = \infty$), in cui sono verificate le condizioni $\partial h_z/\partial n = 0$ su s per onde ***TE*** e $e_z = 0$ su s per onde ***TM***.

Il fatto che K_t^2 sia reale negativo implica notevoli proprietà. Come si è già accennato, le autofunzioni relative a diversi autovalori risultano ortogonali tra loro (con importanti conseguenze dal punto di vista energetico). Inoltre, le autofunzioni T (determinate a meno di una costante moltiplicativa complessa) possono essere considerate sempre reali, senza perdita di generalità.

Infatti, per una autofunzione T, generalmente complessa, può scriversi: $T = T_R + jT_J$ con T_R, T_J funzioni reali. L'equazione di *Helmholtz* $\nabla_t^2 T = K_t^2 T$ diviene:

$$\nabla_t^2(T_R + jT_J) = K_t^2(T_R + jT_J) \implies \nabla_t^2 T_R - K_t^2 T_R + j(\nabla_t^2 T_J - K_t^2 T_J) = 0$$

Essendo K_t^2 reale, l'annullamento della parte reale ed immaginaria dell'espressione implica

$$\begin{cases} \nabla_t^2 T_R = K_t^2 T_R \\ \nabla_t^2 T_J = K_t^2 T_J \end{cases}$$

Ciò consente di effettuare una ulteriore considerazione sui campi: come si è visto, sia nelle componenti trasversali $(\underline{E}_t, \underline{H}_t)$ sia nelle longitudinali $(E_z\,\underline{z}_0, H_z\,\underline{z}_0)$ per una generica onda ***TE*** o ***TM***, si ha sempre la presenza di un fattore relativo alla dipendenza trasversale (esprimibile in funzione di $T(q_1, q_2)$) e di un fattore relativo alla dipendenza longitudinale (tramite la $Z(z)$). Essendo $T(q_1, q_2)$ reale, la fase di ogni componente (collegata con la parte immaginaria) non varia con le coordinate q_1, q_2; essa dipenderà solo dalla z (piani equifase z = costante).

I modi ***TE*** e ***TM*** nelle guide d'onda ideali sono pertanto delle onde piane non uniformi.

Analizziamo ora la dipendenza longitudinale dei campi ***TE*** e ***TM*** in guida d'onda ideale, collegata con la costante K_z. Ricordiamo che la (6.4) rappresentava la generica dipendenza longitudinale dei campi

$$Z(z) = C_1\, e^{K_z z} + C_2\, e^{-K_z z}$$

più in particolare si era arrivati alle due relazioni (6.3)

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases}$$

K_z è legato a K^2 e K_t^2 dalla relazione di separabilità:

$$K_t^2 + K_z^2 = K^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c$$

da cui può ricavarsi la costante di propagazione longitudinale K_z che sarà una grandezza in genere complessa $K_z = \pm\sqrt{K^2 - K_t^2} = \pm(\alpha_z + j\beta_z)$ dove si è posto $\alpha_z = Re\{K_z\}, \beta_z = Im\{K_z\}$.

Dall'espressione di $Z(z)$ si può notare che α_z indica una sua variazione di ampiezza mentre β_z si riferisce alla fase al variare della coordinata longitudinale.

Riferiamoci ora a guide di tipo ***PEI*** nel cui interno vi sia un dielettrico non dissipativo (conducibilità nulla).

Se $g = 0, \varepsilon_c = \varepsilon$ per cui $K^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon$ è reale non positivo (in genere supporremo comunque di non essere in un caso statico cioè $\omega \neq 0$; inoltre riterremo il mezzo non dispersivo, per cui ε e μ sono indipendenti da ω). Con questa ipotesi fondamentale (che consideriamo per ora sempre verificata) K_z risulta dato dalla radice quadrata della differenza tra due quantità negative $K_z = \pm\sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon - K_t^2}$ e pertanto potrà assumere valori reali o immaginari puri. Scegliendo la soluzione positiva della radice abbiamo:

$$K_z = \pm\sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon - K_t^2} = \begin{cases} K_z \; reale \; \alpha_z > 0, & se \; K^2 > K_t^2 \\ K_z = 0, & se \; K^2 = K_t^2 \\ K_z \; immaginario \; j\beta_z, & se \; K^2 < K_t^2 \end{cases}$$

Quando $|K_t^2| > \omega^2 \mu \varepsilon$ abbiamo K_z reale (positivo) e l'onda ha una dipendenza da z del tipo:

$$Z(z) = C_1 \, e^{\alpha_z z} + C_2 \, e^{-\alpha_z z}$$

Dall'esame dell'onda diretta si deduce che il campo ha fase costante, attenuandosi al crescere di z.

Quando $|K_t^2| < \omega^2 \mu \varepsilon$ abbiamo K_z immaginario puro e l'onda ha una dipendenza da z del tipo:

$$Z(z) = C_1 \, e^{j\beta_z z} + C_2 \, e^{-j\beta_z z}$$

che rappresenta un campo che si propaga nel verso delle z positive senza attenuazione (ampiezza costante) e con fase variabile all'aumentare di z.

I due casi precedenti, così diversi dal punto di vista fisico, sono separati dal valore per cui $|K_t^2| = \omega^2\mu\varepsilon$ che dà luogo a K_z nulla; in tal caso l'onda non dipende dalla coordinata longitudinale, ma è costante in modulo e fase.

Noto K_t^2 (determinato dalle condizioni al contorno e dalla forma e dimensioni della struttura guidante) si possono determinare le pulsazioni per cui $K_z = 0$:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-K_t^2}{\mu\varepsilon}} = -j\frac{K_t^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (6.9)$$

avendo scelto la radice positiva della pulsazione. La frequenza corrispondente, si ricava dalla nota relazione $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$, e prende il nome di "*frequenza di taglio*" o di "*cut-off*" relativa ad un certo modo di propagazione nella guida, e determinata dal corrispondente autovalore K_t^2.

Quindi per $\omega > \omega_c$ ($|K^2| = \omega^2\mu\varepsilon > |K_t^2| = \omega_c^2\mu\varepsilon$), cioè per frequenze superiori a quella di taglio, l'onda si propaga senza attenuarsi, per $\omega < \omega_c$ ($|K^2| = \omega^2\mu\varepsilon < |K_t^2| = \omega_c^2\mu\varepsilon$), cioè per frequenze inferiori a quella di taglio l'onda si attenua al crescere di z. In sostanza la guida d'onda ideale (con dielettrico non dissipativo) si comporta come un filtro passa-alto per campi ***TE*** e ***TM*** (ciò giustifica fra l'altro l'appellativo dato a f_c).

L'espressione travata per K_z era:

$$K_z = \sqrt{K^2 - K_t^2}$$

In guida d'onda con mantello cilindrico avente $g = \infty$ e mezzo interno non dissipativo ($g = 0$), ed esprimendo K_t^2 in funzione di ω_c (mezzi non dispersivi) possiamo scrivere:

$$K_z = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + \omega_c^2\mu\varepsilon} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1\right)} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\nu^2 - 1}$$

avendo introdotto il parametro adimensionale $\nu = \omega_c/\omega$. (In relazione al loro significato fisico considereremo pulsazioni o frequenze positive).

K_z risulta essere funzione del mezzo (tramite μ, ε), della frequenza al variare della quale sia ha:

$$K_z = \begin{cases} 0 < \omega < \omega_c \ (\nu > 1) & se\ Re\{K_z\} = \alpha_z, \quad Im\{K_z\} = 0 \\ \omega = \omega_c \ (\nu = 1) & se\ Re\{K_z\} = 0, \quad Im\{K_z\} = 0 \\ \omega > \omega_c \ (0 < \nu < 1) & se\ Re\{K_z\} = 0, \quad Im\{K_z\} = \beta_z \end{cases}$$

Può essere utile esaminare in dettaglio l'andamento di K_z in funzione di ω, studiando la parte reale ed immaginaria.

1) Parte reale di K_z:

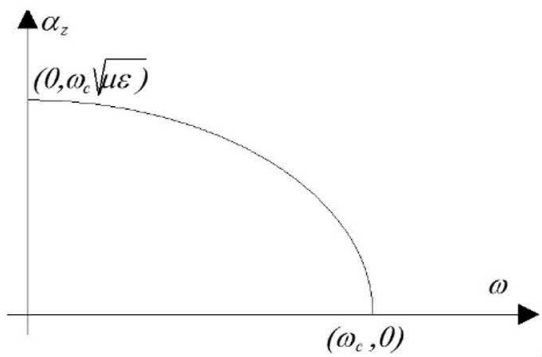


Figura 6.1 Conica Ellittica

Essa è nulla per $\omega \geq \omega_c$, mentre per $0 < \omega < \omega_c \ (\nu > 1)$ si ha: $K_z = \alpha_z = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}$ ovvero $\alpha_z^2 = \omega_c^2\mu\varepsilon - \omega^2\mu\varepsilon$ che dividendo per $\omega_c^2\mu\varepsilon$ diventa: $\frac{\alpha_z^2}{\omega_c^2\mu\varepsilon} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1$ che sul piano (ω, α_z) rappresenta l'equazione di una conica ellittica mostrata in figura 6.1

2) Parte immaginaria di K_z:

Essa è nulla per $0 < \omega \leq \omega_c \ (\nu \geq 1)$, mentre per $\omega > \omega_c$ abbiamo: $K_z = j\beta_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$ ovvero $\beta_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \omega_c^2\mu\varepsilon$ che dividendo per $\omega_c^2\mu\varepsilon$ diventa: $\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - \frac{\beta_z^2}{\omega_c^2\mu\varepsilon} = 1$ che sul piano (ω, β_z) rappresenta l'equazione di una conica iperbolica mostrata in figura 6.3

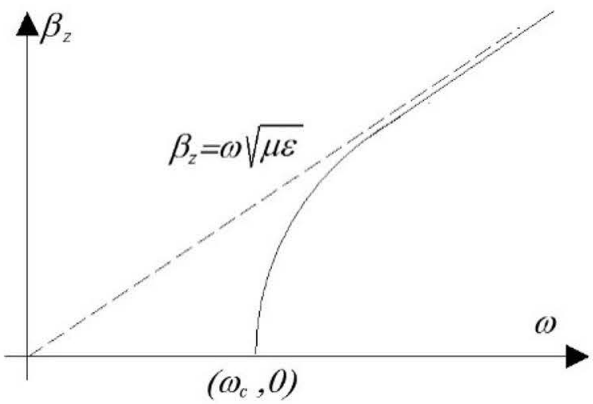


Figura 6.2 Conica Iperbolica

L'asse focale coincide con quello delle ω (con l'origine equidistante dai due fuochi), gli asintoti hanno equazione $\beta_z = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Dall'esame dei due grafici, ottenuti in relazione alle ipotesi fatate sulla struttura, si può ribadire che per frequenze inferiori ha quella di cut-off non si ha propagazione (c'è solo attenuazione che diminuisce al crescere della frequenza fino ad annullarsi), mentre sopra tale frequenza l'onda si propaga con una costante

$$K_z = j\beta_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = j\beta_0\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \qquad con\ \beta_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

è la costante di fase di un'onda piana che si propaga liberamente in un mezzo con costanti μ, ε ancora nel verso delle z positive.

Si vede che $\beta_z < \beta_0$ per frequenze molto elevate si ha che β_z tende a β_0, ovvero la costante di fase K_z in propagazione guidata tende a quella nello spazio libero (intuitivamente ciò può spiegarsi considerando che per tali frequenze le corrispondenti lunghezze d'onda delle grandezze *e.m.* sono molto piccole rispetto alle dimensioni della guida, che ai fini della propagazione non differisce più molto dal comportamento dello spazio libero).

Riassumendo, nel caso ideale (in una guida d'onda di tipo ***PEI*** di certa forma e dimensione, con dielettrico non dissipativo né dispersivo) ad ogni autovalore K_t^2 (e quindi ad ogni modo) corrisponde una frequenza di taglio $f_c = |K_t|/(2\pi\sqrt{\mu\varepsilon})$ al disopra della quale quel particolare modo può propagarsi. Come si è avuto modo di accennare, è possibile ordinare l'infinità numerabile degli autovalori in ordine crescente (in modulo) e con essi le corrispondenti frequenze di taglio come in figura 6.3

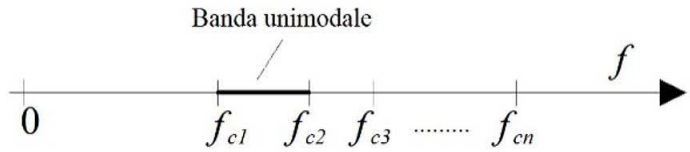


Figura 6.3 Ordinamento delle frequenze di taglio.

Ad una frequenza di lavoro si avranno modi con frequenza di taglio superiore che si attenuano esponenzialmente lungo z, e modi con frequenza di taglio inferiore che invece si propagheranno senza attenuazione lungo le z con configurazioni spaziali del campo dipendenti dal particolare autovalore del modo. Il modo dominante (quello a frequenza di taglio minore) ha una sua particolare importanza, infatti ai fini di un efficiente trasporto di energia, in una certa guida d'onda, è conveniente utilizzare soltanto un modo. L'unica banda di frequenze che è possibile utilizzare al tal fine è quello compreso tra la frequenza di taglio del modo dominante e quella del modo di ordine immediatamente superiore.

Nel caso di guide d'onda reali, le considerazioni fino ad ora trattate vanno riviste, infatti le perdite delle pareti metalliche della guida ed i mezzi dielettrici dissipativi

modificano in parte la teoria trattata e quindi portano a risultati che si discostano da quelli ideali.

Infatti, come si è già avuto modo di vedere, per dielettrici reali vale $\varepsilon \neq \varepsilon = \varepsilon + \frac{g_d}{j\omega}$ dove g_d è la conduttanza del dielettrico stesso.

La costante di propagazione assume la forma $K_z = \pm\sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c - K_t^2} = \pm\sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu g_d - K_t^2}$ dove K_t^2 dipende dalla sola struttura guidante e non dalla frequenza $K_t^2 = -\omega_c^2\mu\varepsilon$ e quindi $K_z = \sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)\mu\varepsilon + j\omega\mu g_d}$. Quindi la costante di propagazione assume una forma complessa con la conseguenza che la sua parte reale provoca una attenuazione dell'onda durante la sua propagazione.

6.4 VELOCITÀ DI FASE

Analizziamo ora il comportamento della fase per un generico modo propagantesi in una guida d'onda ideale (sempre a simmetria cilindrica e sezione generica). Si è già accennato al fatto che una qualsiasi componente del campo che consideriamo (***TE*** o ***TM***), può esprimersi separatamente in funzione delle coordinate trasversali (tramite la funzione $T(q_1, q_2)$ reale) e della longitudinale (con la $Z(z)$ generalmente complessa); essendo in regime armonico il campo *e.m.* ha una espressione spazio-temporale del tipo:

$$A(q_1, q_2, z) = Re\left[C\, f(q_1, q_2)\, e^{-K_z z} e^{j\omega t}\right] = Re\left[C\, f(q_1, q_2)\, e^{-\alpha_z z} e^{j(\omega t - \beta_z z)}\right] \qquad (6.4.1)$$

avendo supposto, per semplicità, la presenza della sola onda diretta (caso di guida *adattata*).

La fase dell'onda è legata al termine esponenziale immaginario:

$$\Phi(z, t) = \omega t - \beta_z z \qquad (6.4.2)$$

Per un osservatore che si muove senza notare variazione di fase, si avrà $d\Phi(z, t) = \omega\, dt - \beta_z dz = 0$ cioè:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = u_z \qquad (6.4.3)$$

Affinché la fase non vari, l'osservatore deve muoversi con una "*velocità di fase*" data dalla (5.3), dove c è la velocità della luce nel mezzo dielettrico.

La velocità di fase varia dunque con la frequenza dell'onda ed è quindi diversa da modo a modo (dipendenza da ω_c e quindi da K_t^2). Si noti che essendo $\omega > \omega_c$ la u_z risulta sempre maggiore della velocità della luce nel mezzo. Ciò potrebbe sembrare un controsenso, ma in realtà non deve stupire (le teorie della relatività sono ancora valide) in quanto u_z non è una velocità di una grandezza fisica, ma soltanto una grandezza astratta e convenzionale, determinata da una variazione spazio-temporale della fase (che è priva di significato fisico).

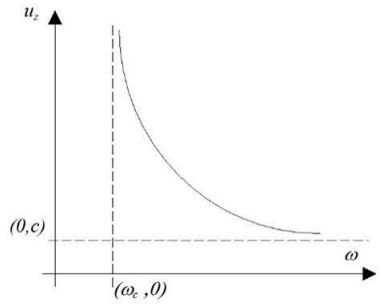


Figura 5.5 – Velocità di Fase

Nella figura 6.4.1 viene riportato l'andamento della velocità di fase per frequenze superiori alla frequenza di taglio. La funzione (6.4.3) ha un asintoto in corrispondenza ad ω_c, per cui in questo intorno a piccole variazioni di frequenza corrispondono grandi variazioni della velocità di fase. Per $\omega \to \infty$ invece la velocità di fase si approssima alla velocità di un'onda piana uniforme $\beta_0 = \omega/c$. Le superfici equifase sono i piani $z = costante$; la lunghezza d'onda λ_z (distanza tra due punti in cui la fase varia di 2π) è:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{u_z}{f}$$

dalla (6.4.3) si ricava:

$$\lambda_z = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \qquad (6.4.4)$$

in cui λ_0 è la lunghezza d'onda nello spazio libero. Il grafico della funzione è analogo a quello della (6.4.3) riportato in figura 6.4.1, per cui valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza. Per $\omega \to \omega_c, \lambda_z \to \infty$ mentre per $\omega \to \infty, \lambda_z \to \lambda_0$

6.5 VELOCITÀ DELL'ENERGIA

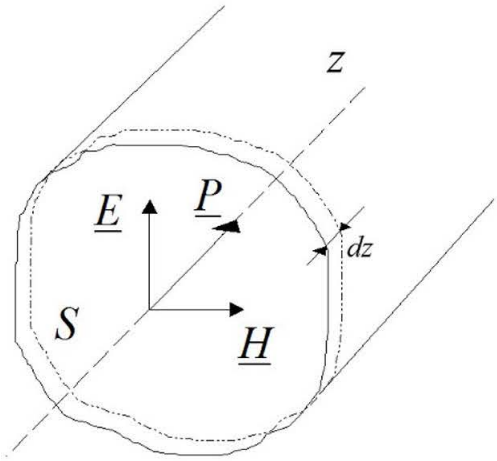


Figura 6.6 – Vettore di Poynting sulla sezione S.

Vogliamo fare ora alcune considerazioni sulla velocità dell'energia *e.m.* nella propagazione di un'onda in una struttura guidante (sempre con caratteristiche ideali).

Nell'ipotesi di regime armonico monocromatico (dipendenza del tipo $e^{j\omega t}$) prendiamo in considerazione il valore medio dell'energia *e.m.* (energia per unità di volume) dato dalla relazione:

$$w(q_1, q_2, z) = w_e + w_m =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\varepsilon\, \underline{E} \cdot \underline{E}^* + \mu\, \underline{H} \cdot \underline{H}^*\right) \qquad \left[{}^{J}/_{m^3}\right] \qquad (6.4.5)^{14}$$

Ricordiamo che il vettore di *Poynting* (il cui flusso attraverso una superficie dà la potenza trasportata) è definito dalla:

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* \quad \left[{}^{W}/_{m^2}\right] \qquad (6.4.6)$$

Riferendoci alle solite notazioni è possibile ricavare una espressione che lega tra loro queste grandezze. Infatti, l'energia media che nell'unità di tempo (potenza media) attraverso la sezione S della guida è la parte reale del flusso $\underline{P}$ su S:

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_S \left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot z_0\, dS \quad [W] \qquad (6.4.7)$$

Nell'intervallo infinitesimo dt, l'energia sarà:

$$e_z = P_z\, dt \quad [J] \qquad (6.4.8)$$

Questa energia è quella immagazzinata nel volume infinitesimo di base S ed altezza dz. Questa energia può essere espressa in funzione della densità di energia w:

$$e_z = \int_\tau w\, d\tau = \int_S w\, dS\, dz = W_z\, dz \ [J] \qquad (6.4.9)$$

[14] Per una trattazione più esauriente dell'argomento si rimanda al G. Gerosa "*Appunti di campi elettromagnetici*" pagg. 60.

dove abbiamo posto $W_z = \int_S w\, dS \ \left[\frac{J}{m}\right]$ energia per unità di lunghezza.

Eguagliando le due espressioni trovate della densità di energia e_z abbiamo:

$$P_z\, dt = W_z\, dz \qquad (6.4.10)$$

Definiamo ora il rapporto $dz/dt = u_w$ come "*velocità dell'energia*" che in base alla (6.4.10) e alle relazioni (6.4.5) e (6.4.7) diviene:

$$u_w = \frac{P_z}{W_z} = \frac{\frac{1}{2} Re \int_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{z}_0\, dS}{\int_S \frac{1}{4}(\varepsilon\, \underline{E} \cdot \underline{E}^* + \mu\, \underline{H} \cdot \underline{H}^*)\, dS} \quad [m\, s^{-1}] \qquad (6.4.11)$$

L'espressione trovata per la velocità dell'energia è generica. Per i modi ***TE*** e ***TM*** essa si semplifica, assumendo nei due casi lo stesso valore (che come vedremo coincide con la "*velocità di gruppo*").

Vediamo la forma che assume la (6.4.11) nel caso di modi ***TM*** riferendoci alla propagazione della sola onda diretta $Z(z) = P_z\, e^{-j\beta_z z}$.

In questo caso si ha:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t + E_z \underline{z}_0 = P_2\, e^{-j\beta_z z}\ \underline{e}_t + P_2\, e^{-j\beta_z z}\, e_z\, \underline{z}_0 \\ \underline{H} = \underline{H}_t = P_2\, e^{-j\beta_z z}\ \underline{h}_t \end{cases} \qquad (6.4.12)$$

Per il calcolo di P_2 abbiamo $\underline{E} \times \underline{H}^* = \underline{E}_t \times \underline{H}_t{}^* + E_z\, \underline{z}_0 \times \underline{H}_t{}^*$ dove il secondo addendo rappresenta un vettore che giace sul piano trasversale ed è pertanto ininfluente ai fini del flusso lungo l'asse *z*.

Pertanto, la (6.4.7) assume la forma

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{z}_0\, dS = \frac{1}{2} Re \int_S \underline{E}_t \cdot \underline{H}_t{}^* \times \underline{z}_0\, dS \qquad (6.4.13)$$

Ricordiamo che in base alle equazioni di *Maxwell* si era arrivati alla $\underline{E}_t = Z_{TM}^{(+)}\, \underline{H}_t \times z_0$, con $Z_{TM}^{(+)} = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c} = \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon}$, inoltre $(\underline{H}_t \times z_0)^* = \left(\frac{\underline{E}_t}{Z_{TM}^{(+)}}\right)^* \Rightarrow \underline{H}_t{}^* \times z_0 = \frac{\underline{E}_t{}^*}{Z_{TM}^{(+)}}$ per cui la (6.4.13) si semplifica nella:

$$P_z = \frac{\omega\varepsilon}{2\beta_z} \int_S |\underline{E}_t|^2\, dS = \frac{\omega\varepsilon}{2\beta_z} P_2 P_2^* \int_S |\underline{e}_t|^2\, dS \qquad (6.4.14)$$

Vediamo ora come le considerazioni fatte modificano la (6.4.5).

$$w_m = \frac{\mu}{4}\underline{H}\cdot\underline{H}^* = \frac{\mu}{4}\left|\underline{H}_t\right|^2 = \left(\frac{\left|\underline{E}_t\right|}{Z_{TM}^{(+)}}\right)^2 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon^2}{4\beta_z^2}\left|\underline{E}_t\right|^2$$

il suo contributo integrale è perciò:

$$\int_S \frac{\mu}{4}\underline{H}\cdot\underline{H}^*\,dS = \frac{\omega^2\mu\varepsilon^2}{4\beta_z^2}\int_S \left|\underline{E}_t\right|^2 dS = \frac{\omega^2\mu\varepsilon^2}{4\beta_z^2}P_2P_2^*\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS$$

L'altro contributo dell'energia elettrica è dato da

$$\int_S \frac{\varepsilon}{4}\,\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS = \frac{\varepsilon}{4}\int_S \left(\left|\underline{E}_t\right|^2 + \left|\underline{E}_z\right|^2\right) dS = \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS + \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\int_S \left|\underline{e}_z\right|^2 dS$$

Anche l'integrale in cui compare la componente longitudinale del campo elettrico e_z può essere espresso in funzione di $\underline{e}_t$, infatti, ricordiamo che per i modi ***TM*** si era arrivati alla relazione (6.6) che può riscriversi nella forma:

$$\int_S \left|\underline{e}_z\right|^2 dS = -\frac{1}{K_t^2}\int_S |\nabla_t e_z|^2\,dS \qquad (6.4.15)$$

inoltre, nel capitolo 1 si era arrivati alla (6.4.21b) da cui ricaviamo $\nabla_t e_z = \frac{K_t^2}{j\beta_z}\underline{e}_t$, per cui sostituendo nell'integrale precedente si ottiene:

$$\int_S \left|\underline{e}_z\right|^2 dS = -\frac{1}{K_t^2}\int_S \left|\frac{K_t^2}{j\beta_z}\underline{e}_t\right|^2 dS = -\frac{K_t^2}{\beta_z^2}\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS \qquad (6.4.16)$$

Tutto il contributo a W_z dell'energia elettrica può allora riscriversi:

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\varepsilon}{4}\,\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS &= \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS - \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\frac{K_t^2}{\beta_z^2}\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS \\ &= \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\left(1-\frac{K_t^2}{\beta_z^2}\right)\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS \qquad (6.4.17)\end{aligned}$$

Il termine tra parentesi tonde può esprimersi come

$$1-\frac{K_t^2}{\beta_z^2} = \frac{\beta_z^2-K_t^2}{\beta_z^2} = -\frac{K_z^2+K_t^2}{\beta_z^2} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{\beta_z^2}$$

per cui

$$\int_S \frac{\varepsilon}{4}\,\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS = \frac{\varepsilon\,P_2P_2^*}{4}\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{\beta_z^2}\int_S \left|\underline{e}_t\right|^2 dS \qquad (6.4.18)$$

Si vede perciò che la densità dell'energia elettrica media immagazzinata è uguale a quella magnetica, ciò poteva dedursi anche in maniera più diretta con semplici considerazioni sul Teorema di *Poynting* complesso (potenza reattiva nulla in una guida senza perdite).

Possiamo finalmente ricavare il valore della velocità dell'energia per i modi ***TM***:

$$u_w = \frac{\frac{P_2 P_2^*}{2}\frac{\omega\varepsilon}{\beta_z}\int_S |\underline{e}_t|^2\, dS}{\frac{P_2 P_2^*}{4}\frac{\omega^2\mu\varepsilon^2}{\beta_z^2}\int_S |\underline{e}_t|^2\, dS} = \frac{\beta_z}{\omega\mu\varepsilon} \qquad (6.4.19)$$

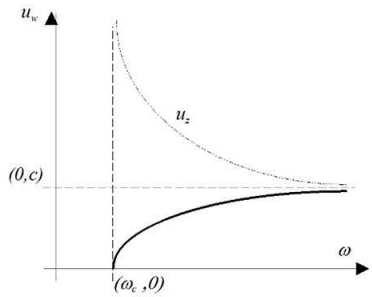


Figura 6.7 – Velocità dell'energia.

Il risultato può essere espresso equivalentemente in funzione di altre grandezze già note, per esempio

$$u_w = \frac{\beta_z}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{Z_{TM}^{(+)}}{\mu} = \frac{\beta_z c}{K} = \frac{c^2}{u_z} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \qquad (6.4.20)$$

Da questa ultima relazione può notarsi come la velocità dell'energia (che è una grandezza fisica) sia sempre minore della velocità della luce nel messo dielettrico. Si può inoltre ricavare il grafico della u_w in funzione della frequenza ω. Si noti che la velocità dell'energia è nulla sotto la frequenza di taglio del modo e tende in modo asintotico alla velocità della luce nel mezzo c.

6.6 VELOCITÀ DI GRUPPO.

In precedenza, sono state introdotte le definizioni e le proprietà della velocità di fase e della velocità dell'energia, relativamente a onde *e.m.* di tipo monocromatico che si propagano in guide d'onda ideali. Un fenomeno che ha dipendenza temporale di tipo puramente sinusoidale, però, rappresenta un *segnale* (una variazione di una certa grandezza fisica, cioè) privo di *contenuti informativi* (il suo andamento è già stabilito a priori).

Semplificando il problema si può dire che si ha un segnale "*utile*" solo se la grandezza è soggetta ad una legge di variazione di cui il destinatario ne conosce la probabilità, che è legata all'informazione[15].

In maniera del tutto generale dovremo riferirci ad un segnale in cui siano presenti più frequenze contemporaneamente.

In particolare, per un campo *e.m.* in guida, che occuperà una certa banda di frequenze in relazione al suo spettro, vogliamo esaminare come esso si propaghi; da questa indagine risulterà che il segnale avente uno spettro di frequenze molto stretto non viene "*distorto*" durante la trasmissione lungo la guida ("*canale perfetto*"), propagandosi con una certa velocità, che sarà detta "*velocità di gruppo*"

$$u_z = \frac{\omega}{\beta_z(\omega)}, \qquad u_w = \frac{\beta_z(\omega)}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{c^2}{u_z}$$

I segnali reali sono caratterizzati da una certa banda di frequenze centrata su una frequenza portante.

Vanno ora distinti i segnali aventi larghezza di banda stretta da quelli a banda larga. I primi si propagano in guida d'onda senza apprezzabili distorsioni in quanto la velocità dell'onda (detta velocità di gruppo risulta pressoché la stessa per tutte le frequenze che compongono il segnale) mentre ciò non è in generale vero per i segnali a larga banda.

Facciamo ora alcune considerazioni di carattere generale.

Lo studio di molti segnali può essere vantaggiosamente affrontato, passando dal dominio del tempo a quello della frequenza (o pulsazione ω, "f" o "ω" in seguito potremo confondere talvolta le pulsazioni con le frequenze, essendo legate tra loro dalla $\omega = 2\pi f$).

In particolare, ci riferiamo a quei segnali $f(t)$ che sono trasformabili secondo *Fourier*, se $f(t)$ è sommabile in $(-\infty, +\infty)$ tramite una trasformazione funzionale lineare (Trasformata di *Fourier*) si può associare alla $f(t)$ una funzione $F(\omega)$ con $\omega \in R$:

---

[15] Per un'analisi molto più dettagliata di questi argomenti e di altri concetti collegati si faccia riferimento ai testi
B. Peroni, "*Comunicazioni Elettriche*", Ed. Scientifiche Siderea, 1973 Roma
P. Mandarini, "*Teoria dei Segnali*", 1979 Editrice La Goliardica - Roma

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \Im\{f(t)\} \tag{6.4.21}$$

Dalla $F(\omega)$ si può risalire alla $f(t)$ tramite la formula di inversione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \Im^{-1}\{f(t)\} \tag{6.4.22}$$ [16]

L'utilità pratica della Trasformata di *Fourier* per lo studio della maggior parte dei segnali (quelli "*impulsivi*" ma, al limite, anche quelli "*periodici*") è notoria.

Tali vantaggi sono evidenti ad esempio nell'analisi del transito dei segnali attraverso reti due porte lineari e permanenti, cui si dà genericamente il nome di "*filtro*".

Un filtro è caratterizzato dalla funzione $h(t)$ che è la risposta della rete stessa ad un impulso per $t = 0$ (spesso indicato con $\delta(t)$ o $u_o(t)$); nota la $h(t)$ si ricava il segnale d'uscita $f_o(t)$ tramite un'integrale di convoluzione:

$$f_o(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, f(t-\tau) d\tau \tag{6.4.23}$$

avendo indicato con $f(t)$ il segnale di ingresso.

Se il filtro è "*stabile*", il calcolo della $f_o(t)$ può in generale essere semplificato introducendo le Trasformate di *Fourier*, passando cioè nel dominio della frequenza. Grazie alle note proprietà della Trasformata di *Fourier* si ha (la convoluzione nel tempo, operazione spesso complicata; diviene semplicemente un prodotto nel dominio della frequenza):

$$F_o(\omega) = \Im\{f_o(t)\} = F(\omega)\, H(\omega) \tag{6.4.24}$$

---

[16] Molti sono i trattati cui ci si può riferire per lo studio della Trasformata di Fourier: un esame teorico generale lo si può trovare in
Aldo Ghizzetti, F. Mazzarella, Alessandro Ossicini: "*Lezioni di complementi di matematica*" edito da Veschi, pag. 267
Le relative applicazioni in: G. Pesamosca: "*Complementi di Matematica*" Ed. La Goliardica, Cap. VII
Trattazioni teorico pratiche in: P. Mandarini, "*Teoria dei Segnali*", 1979 Editrice La Goliardica – Roma, pag. 45 e segg.
Oppure in: Filligoi, "*Appunti per il corso di Teoria dei Segnali: esercitazioni*", pagg. 18-45
O ancora: E. Oran Brigham, "*The Fast Fourier Transform*"

Avendo indicato con $F_o(\omega)$ la ***T.d.F.*** di $f_o(t)$, con $F(\omega)$ la ***T.d.F.*** di $f(t)$ e con $H(\omega)$ la ***T.d.F.*** di $h(t)$, quest'ultima prende anche il nome di "*funzione di trasferimento*" del filtro.

La funzione $f_o(t)$ si ottiene antitrasformando secondo la:

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, H(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{6.4.25}$$

In genere la funzione di trasferimento $H(\omega)$ è una funzione complessa e può pertanto scomporsi in parte reale e immaginaria o in modulo e fase; in quest'ultimo caso possiamo scrivere:

$$H(\omega) = Z(\omega)\, e^{-j\psi(\omega)} = |H(\omega)|\, e^{-j\psi(\omega)} = |H(\omega)|\, e^{-j\angle H(\omega)} \tag{6.4.26}$$

$$|H(\omega)| = Z(\omega), \qquad \angle H(\omega) = \psi(\omega)^{17}$$

Spesso, per limitare la perdita di informazione di un segnale, è necessario ridurre la "*distorsione*" durante la trasmissione. In pratica questo significa riuscire a risalire alla funzione $f(t)$ a partire dal segnale $f_o(t)$ (a meno di una costante C moltiplicativa che rappresenta l'"*attenuazione*" della rete ed una costante τ che rappresenta il "*ritardo di tempo*" dovuto alla propagazione del segnale):

$$f_o(t) = C\, f(t - \tau) \tag{6.4.27}$$

In tal caso la rete due porte lineare e permanente con cui possiamo schematizzare un canale trasmissivo, dovrà avere una funzione di trasferimento che soddisfi le seguenti ipotesi:

$$|H(\omega)| = Z(\omega) = A, \qquad \angle H(\omega) = \psi(\omega) = \tau\omega + q \tag{6.4.28}$$

cioè abbia modulo costante (A reale positivo) e fase lineare con la frequenza (τ reale positivo, q reale).

Quanto detto si dimostra facilmente, infatti se $H(f) = A\, e^{-j(\tau\omega+q)}$ si ha per la $f_o(t)$ l'espressione:

---

[17] Su questi argomenti: P. Mandarini, "*Teoria dei Segnali*", 1979 Editrice La Goliardica – Roma, § II.2.8.

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-j(\tau\omega+q)}\, F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{Ae^{-jq}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega =$$

$$f_o(t) = Ae^{-jq}\Im^{-1}\{F(\omega)e^{-j\omega t}\} = Ae^{-jq}f(t-\tau) = C\, f(t-\tau) \qquad (6.4.29)$$

o viceversa:

$$f_o(t) = C\, f(t-\tau) \rightarrow \Im\{f_o(t)\} = F_o(\omega) = C\, \Im\{f(t-\tau)\} = C\, F(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

Ma è pure:

$$F_o(\omega) = F(\omega)\cdot H(\omega)$$

Per cui confrontando si ottiene

$$\angle H(\omega) = e^{-j(\omega t+q)}$$
$$|H(\omega)| = C\, e^{jq} = A$$

In sostanza le condizioni trovate sul modulo e fase di $H(\omega)$ sono necessarie e sufficienti per avere un canale "*senza distorsioni*", nei termini precisati in precedenza[18].

Quanto detto viene in pratica a coincidere con il caso di "*canale perfetto*", qualora si ammetta di avere in uscita una $f_o(t)$ reale per $f(t)$ reale: in tal caso $C = A$ (reale positivo) e $q = 0$:

$$Z(\omega) = A, \qquad \Psi(\omega) = \tau\omega \qquad \leftrightarrow \qquad f_o(\omega) = A\, f(t-\tau)$$

Riferiamo finalmente queste considerazioni al caso che ci riguarda: ovvero la propagazione di onde *e.m.* in guida d'onda a simmetria cilindrica secondo la coordinata z, dalle caratteristiche ideali.

Come già si è avuto modo di accennare il campo *e.m.* può genericamente porsi nella forma (variazione spazio-temporale):

$$f(t, q_1, q_2, z) = C\, f_1(t)\; f_2(q_1, q_2)\; f_3(z)$$

Per quanto detto il termine $f_2(q_1, q_2)$ può essere espresso in funzione di un $T(q_1, q_2)$ che è reale ed indipendente dalla frequenza, mentre la $f_3(z)$ viene a dipendere dalla $Z(z)$: se supponiamo di avere propagazione (ideale) della sola onda diretta la $f_3(z)$ è direttamente proporzionale al termine $e^{-j\beta_z(\omega)z}$.

---

[18] Si confronti ciò con: Peroni: Op Cit. § 3.3, 3.4

Il comportamento della guida, nei riguardi del campo all'ingresso e all'uscita, viene a identificarsi con quello di un filtro (una rete due porte LP) avente una certa funzione di trasferimento $H(f)$. In particolare, eccitando nella sezione d'ingresso (individuata da $z = z_1$) la guida con un campo *e.m.* del tipo:

$$f(t, q_1, q_2, z_1) = C\, e^{j\omega_o t}\ f_2(q_1, q_2)\ C\, e^{-j\beta_z(\omega) z_1}$$

In uscita (individuata dal piano $z = z_2 = z_1 + l$, dove l è la lunghezza della struttura trasmissiva) avremo

$$f(t, q_1, q_2, z_2) = C\, e^{j\omega_o t}\ f_2(q_1, q_2)\ C\, e^{-j\beta_z(\omega) z_2}$$

Passando nel dominio della frequenza abbiamo che:

$$\Im\{f(t, q_1, q_2, z_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{j\omega_o t}\ f_2(q_1, q_2)\, e^{-j\beta_z(\omega) z_1}\ e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{j\omega_o t}\ f_2(q_1, q_2)\, e^{-j\beta_z(\omega) z_1}\ e^{-j\omega t}\, dt = C\, f_2(q_1, q_2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta_z(\omega) z_1}\ e^{-j(\omega-\omega_o)t}\, dt$$

$$= F(\omega)$$

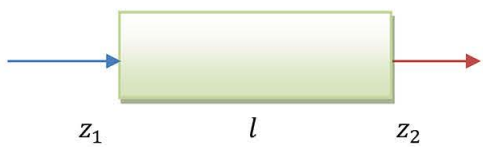


Figura 5.8 – linea trasmissiva di lunghezza l.

$$\Im\{f_o(t, q_1, q_2, z_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{j\omega_o t}\ f_2(q_1, q_2)\, e^{-j\beta_z(\omega) z_2}\ e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= C\, f_2(q_1, q_2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta_z(\omega) z_1} e^{-j\beta_z(\omega) l}\, e^{-j(\omega-\omega_o)t}\, dt = F_o(\omega) = F(\omega) e^{-j\beta_z(\omega) l}$$

Giacché, come si è visto, abbiamo $F_o(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$, si può dire che la guida d'onda di lunghezza l si comporta come un filtro con funzione di trasferimento $H(\omega) = e^{-j\beta_z(\omega) l}$; ovvero

$$|H(\omega)| = Z(\omega) = 1$$
$$\angle H(\omega) = \Psi(\omega) = \beta_z(\omega) l \ per\ \omega > \omega_c > 0$$

(Considerazioni sulla $\Psi(\omega)$ per $\omega < 0$ saranno svolte più avanti)

Si noti come, neppure per guide ideali, sia possibile avere trasmissione che risulti teoricamente priva di distorsione;

infatti, è $\beta_z(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$, per cui la fase della funzione di trasferimento non è lineare con ω: la struttura guidante rappresenta cioè un "*sistema dispersivo*".

In effetti potranno considerarsi non distorti quei segnali composti da uno strettissimo spettro di frequenze (in cui $\beta_z(\omega)$ può essere sostituito con buona approssimazione dal relativo sviluppo di Taylor del primo ordine) ovvero quelli aventi frequenze molto elevate (zona in cui $\beta_z(\omega)$ tende asintoticamente alla retta $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$).

In pratica poi nelle guide reali si ha un altro contributo alla distorsione, dovuto a un'attenuazione non lineare con ω (vedi Attenuazione).

Consideriamo ora un caso particolarmente significativo, per esemplificare quanto detto: la propagazione in guida di un segnale con dipendenza temporale del tipo:

$$f(t) = m(t)\,cos(\omega_o t) \qquad \text{con } f_o \text{ detta frequenza portante}$$

Dove $m(t)$ è una funzione avente una banda in frequenza compresa tra $-f_m$ e f_m $(-\omega_m/2\pi\,,\omega_m/2\pi)$; esso "modula" un segnale armonico con frequenza portante $f_o,(\omega_o/2\pi)$ ed è collegato al contenuto informativo; per tali fini risulterà che $f_o \gg f_m,(\omega_o \gg \omega_m)$.

Supponiamo che l'andamento qualitativo della trasformata di *Fourier* di $m(t)$ (chiamato anche spettro di frequenze) sia quello espresso dall'andamento in Fig.6.4.9 (nel dominio di ω):

$m(t)$ è cioè un segnale limitato in banda, con banda ω_m/π centrata nell'origine (la $M(\omega)$ viene considerata reale, nell'ipotesi semplificativa di $m(t)$ reale pari).

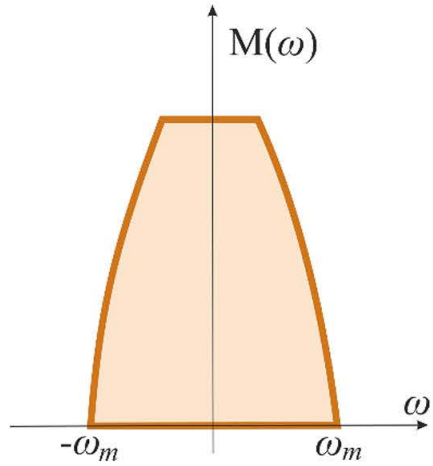


Figura 6.9 – Spettro di frequenze.

Lo spettro di frequenze di $\cos\omega_o t$ è notoriamente costituito da due impulsidi area 1/2 centrati in $\omega = \pm\omega_o$; (fig. 6.10) cioè:

$$\Im\{\cos\omega_o t\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)]$$

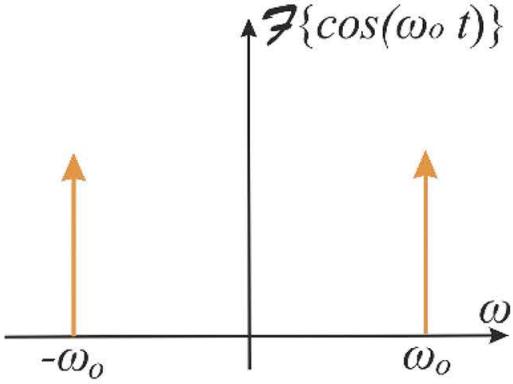


Figura 6.10 – Spettro funzione sinusoidale

(Essendo anche $\cos\omega_o t$ reale pari la sua Trasformata di *Fourier* è reale)

Esprimendo il coseno in forma esponenziale (*Eulero*) e applicando la proprietà di traslazione in forma della ***T.d.F.***, possiamo ottenere lo spettro in ω della $f(t)$:

$$F(\omega) = \Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\, cos(\omega_o t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\, \frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\, e^{-j(\omega-\omega_o)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\, e^{-j(\omega+\omega_o)t}\, dt = \frac{1}{2}[M(\omega-\omega_o) + M(\omega+\omega_o)]$$

Lo spettro di $f(t) = m(t)\, cos(\omega_o t)$ è espresso in fig.6.10b: si vede che il segnale è limitato in banda con banda ω_m/π centrata in $\omega_o/2\pi$.

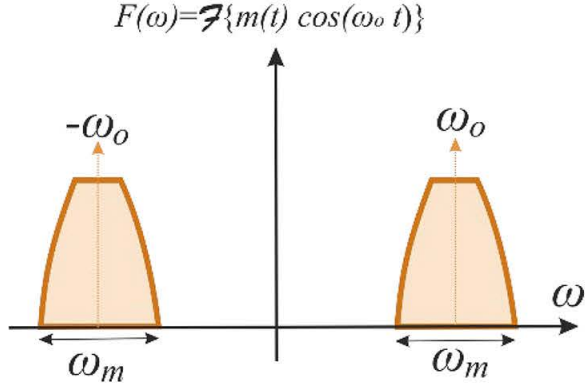


Figura 6.10b – Spettro funzione f(t)

Analizziamo ora il comportamento della guida come canale trasmissivo: si è visto che per $\omega > \omega_c > 0$, la sua funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) = e^{-j\beta_z(\omega)l}$$

Si noti che la struttura guidante è senz'altro un filtro "*idealmente realizzabile*" (la sua risposta impulsiva $h(t)$ è sicuramente un segnale reale): come tale la sua $H(\omega)$ ha la proprietà secondo la quale il modulo $Z(\omega)$ è una funzione pari e la fase $\Psi(\omega)$ è una funzione dispari della frequenza.

Si ha perciò, considerando anche pulsazioni negative, che $\Psi(\omega) = -\Psi(-\omega)$.

Avendo definito $\beta_z(\omega) = +\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \omega_c^2\mu\varepsilon}$ si vede però che β_z risulta una funzione pari (per $|\omega| \geq \omega_c$).

Affinché $H(\omega)$ abbia fase dispari (requisito dovuto a ragioni meramente fisiche) si dovrà quindi cambiare di segno alla $\beta_z(\omega)$ per frequenze negative; così potremo porre:

$$H(\omega)\begin{cases} e^{-j\beta_z(\omega)l} \; per \; \omega > 0 \\ e^{+j\beta_z(\omega)l} \; per \; \omega < 0 \end{cases}$$

L'andamento $\angle H(\omega)$ è rappresentato in fig. 6.11

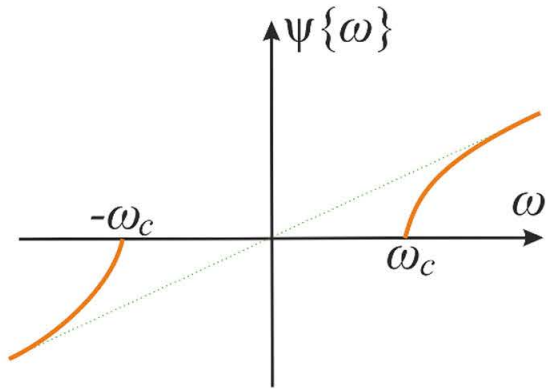


Figura 6.11 – Andamento della fase

In queste ipotesi il segnale d'uscita $f_o(t)$ ha uno spettro $F_o(\omega)$ dato da:

$$F_o(\omega) = \Im\{f_o(t)\} = F(\omega)H(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega-\omega_o)e^{-j\beta_z(\omega)l} + M(\omega+\omega_o)e^{j\beta_z(\omega)l}\right]$$

Antitrasformando si ha la $f_o(t)$:

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_o(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}M(\omega-\omega_o)e^{-j\beta_z(\omega)l}e^{j\omega t}\, d\omega\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_o-\omega_m}^{\omega_o+\omega_m} M(\omega-\omega_o)e^{j\omega t - j\beta_z(\omega)l}\, d\omega\right]$$

Avendo sfruttato il fatto che $F_o(\omega)$ ha parte reale parie immaginaria dispari, essendo l'uscita $f_o(t)$ un segnale reale; e che $F(\omega)$risulta, per $\omega > 0$, non nullo solo nella banda $(\omega_o - \omega_m, \omega_o + \omega_m)$.

L'espressione ricavata per $f_o(t)$può essere ulteriormente semplificata. Infatti, nell'ipotesi che la banda del segnale sia molto stretta $(\omega_m \ll \omega_o)$ $\beta_z(\omega)$ può essere approssimato con i primi termini dello sviluppo in serie di Taylor intorno a ω_o; in particolare, in relazione anche al comportamento di $\beta_z(\omega)$ alle frequenze molto elevate, si può pensare lo sviluppo al termine di primo grado, con buona approssimazione:

$$\beta_z(\omega) \simeq \beta_z(\omega_o) + \left.\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_o}(\omega-\omega_o) = \beta_z(\omega_o) + \beta_z'(\omega_o)(\omega-\omega_o)$$

Con questa linearizzazione si ha per $f_o(t)$

$$f_o(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_o+\omega_m}^{\omega_o+\omega_m} M(\omega-\omega_o)e^{j\omega\left(t-\beta_z'(\omega)\right)l}e^{-j\beta_z(\omega_o)l+j\beta_z'(\omega)l\omega_o}\,d\omega\right]$$

Applicando le solite proprietà della ***T.d.F.*** si ha:

$$f_o(t) = \mathrm{Re}\left[e^{-j\beta_z(\omega_o)l+j\beta_z'(\omega)l\omega_o}\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_o-\omega_m}^{\omega_o+\omega_m} M(\omega-\omega_o)e^{j(\omega-\omega_o)\left(t-\beta_z'(\omega)\right)l}e^{j\omega_o\left(t-\beta_z'(\omega)\right)l}\,d\omega\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{-j\beta_z(\omega_o)l+j\beta_z'(\omega)l\omega_o}\,\Im^{-1}\left\{M(\omega)e^{-j\omega\beta_z'(\omega_o)l}\right\}e^{j\omega_o\left(t-\beta_z'(\omega)\right)l}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{-j\beta_z(\omega_o)l}\,m(t-\beta_z'(\omega_o)l)\,e^{j\omega_o tl}\right] = m(t-\beta_z'(\omega_o)l)\cos(\omega_o t-\beta_z'(\omega_o)l)$$

Come si poteva prevedere sotto queste ipotesi, il segnale modulante $m(t)$ viene riprodotto all'uscita della guida lunga l senza distorsione, con un tempo di ritardo $\tau = \beta_z'(\omega_o)l$ (e, visto che abbiamo supposto la struttura dalle caratteristiche ideali, senza attenuazione di modulo); sia ha inoltre uno sfasamento nel termine armonico.

Il "*contenuto informativo*", collegato a $m(t)$, avendo percorso una distanza l giunge dopo un tempo $\tau = \beta_z'(\omega_o)l$ può allora definirsi la "*velocità di gruppo*", ovvero la velocità di propagazione del segnale $m(t)$:

$$u_g = \frac{l}{\beta_z'(\omega_o)l} = \frac{1}{\beta_z'(\omega_o)} = \frac{1}{\left.\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_o}} = \left.\frac{d\omega}{d\beta_z(\omega)}\right|_{\omega=\omega_o}$$

O generalmente, in una funzione di una qualsiasi pulsazione:

$$u_g = \frac{1}{\left.\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_o}} = \left.\left(\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right)^{-1}\right|_{\omega=\omega_o} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = v\sqrt{1-v^2}\ per\ c=v$$

Per la propagazione in guida otteniamo per u_g l'espressione:

$$u_g = \left(\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right)^{-1} = \left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}\right)\right]^{-1} = \left(\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}\right)^{-1} = \frac{c\beta_z(\omega)}{\omega} = \frac{\beta_z(\omega)}{\omega\mu\varepsilon}$$

Si ha cioè l'interessante proprietà:

$$u_g = u_w\frac{c^2}{u_z}$$

Che rappresenta la relazione tra *velocità di fase* e la *velocità dell'energia o di gruppo*.

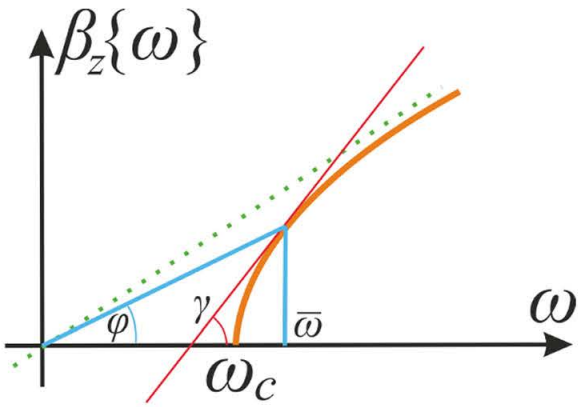


Figura 6.12 – velocità di fase e di gruppo

Nella struttura guidante, cioè, il valore della velocità di gruppo coincide con quello della velocità dell'energia, che è sempre minore di quello della velocità di fase (sistema dispersivo). Nelle onde piane uniformi invece i tre tipi di velocità sono tra loro coincidenti e indipendenti da ω; β_z risulta infatti funzione lineare della frequenza e non si ha dispersione.

Un semplice metodo grafico per analizzare e confrontare la velocità di fase e di gruppo è rappresentato in fig. 5.12:

in corrispondenza di una certa $\overline{\omega}$, la velocità di fase $\overline{u}_z = \overline{\omega}/\overline{\beta}_z$ è esprimibile come $\arctan\varphi$, mentre la velocità di gruppo $\overline{u}_g = 1/\left.\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\overline{\omega}}$ è la $\arctan\gamma$. tra le altre cose si vede che è sempre $\gamma > \varphi$ (il che riconferma che la $u_g = \arctan\gamma$ è sempre minore di $u_z = \arctan\varphi$)

6.7 ATTENUAZIONE

Nello studio svolto finora ci si è sempre riferiti a strutture guidanti dalle caratteristiche ideali: tutte le espressioni relative ai campi *e.m.* in esse propagantesi sono scaturite dall'aver considerato l'ipotesi fondamentale di mantello metallico ***PMI*** ($g = \infty$) e di un dielettrico interno non dissipativo ($g = 0$); la struttura in esame risulta ciòe "*priva di perdite*".

In realtà non è possibile avere condizioni ideali siffatte, cosicché il metallo avrà una conducibilità finita e il dielettrico una conducibilità non nulla, sarà necessario modificare opportunamente quelle relazioni che in qualche modo vengano a dipendere dalle caratteristiche proprie della struttura.

A questo proposito vogliamo fare in particolare alcune considerazioni di carattere energetico, riguardanti la dissipazione del flusso di potenza e l'attenuazione di un'onda in guida.

Ci riferiremo pertanto a una guida d'onda a simmetria cilindrica di sezione generica, avente il mantello metallico costituito da un "*buon conduttore*" ($g \gg \omega\varepsilon$) di un determinato spessore e il mezzo trasmissivo da un "*buon dielettrico*" ($g \ll \omega\varepsilon$).

Può essere utile ricordare i termini di distinzione tra mezzi "*buoni conduttori*" e "*buoni dielettrici*".

Ricordando che da *Maxwell* si ha, nello spazio esterno alle sorgenti, che $\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon_c \underline{E} = j\omega\varepsilon \underline{E} + g\underline{E}$, dove i termini $j\omega\varepsilon\underline{E}$ e $g\underline{E}$ forniscono rispettivamente i contributi della densità di corrente di spostamento e di conduzione.

Un mezzo per cui risulta $\omega\varepsilon \gg g$ (in esso la corrente di spostamento è largamente prevalentemente su quella di conduzione) si dirà "*buon dielettrico*"; un mezzo per cui per cui si ha $g \gg \omega\varepsilon$ (corrente di conduzione assai superiore a quella di spostamento) si dirà "*buon conduttore*".

Si vede che la proprietà di un mezzo di esser buon dielettrico o buon conduttore viene a dipendere dalla frequenza di "*lavoro*"; si può vedere però che nel campo di frequenze tipiche delle microonde, la classificazione data non fornisce mai situazioni controverse. Infatti, si può notare che la conducibilità è in genere o altissima o bassissima nei materiali; nei buoni conduttori $g \sim 10^{7}$, nei buoni dielettrici $g \sim 10^{-10} \div 10^{-17}$.

Essendo per tutti $\varepsilon \sim 10^{-11}$ e le pulsazioni usate nella tecnica $\omega \sim 10^{4} \div 10^{12}$, si ha che $\omega\varepsilon \sim 10^{-7} \div 10$.

Si vede perciò che le conducibilità g sono sempre molto diverse in valore dalla gamma possibile degli $\omega\varepsilon$, i materiali usati nella tecnica delle microonde sono sempre distinguibili in modo preciso in buoni conduttori e buoni dielettrici.

In genere nelle guide d'onda reali si ha dissipazione di potenza reale, in virtù delle perdite per effetto *Joule* sia nel metallo che nel dielettrico (correnti elettriche in essi con conducibilità finita): in entrambi i casi ciò implica la presenza di un termine reale α_z nell'espressione della costante di propagazione K_z.

In genere il contributo maggiore alle perdite è fornito dal fatto che la conducibilità del mantello metallico non è infinita, giacché è possibile avere in pratica dielettrici tali da poter essere considerai con buona approssimazione ideali (ad esempio l'aria secca ha $g \cong 0$.

Le perdite dovute al dielettrico dissipativo ($\varepsilon_c = \varepsilon + j\, g/\omega$) possono essere generalmente esaminate attraverso la costante di propagazione K_z; come già visto (Cfr pag 56 e segg), nel caso di pareti metalliche perfettamente conduttrici ($g \cong \infty$) si aveva:

$$K_z = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon_c - K_t^2} = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon - K_t^2}$$

Nel caso di dielettrico non dissipativo ($\varepsilon_c = \varepsilon$) si aveva che, al variare di ω, essendo K_t^2 reale, poteva risultare o puramente immaginaria (propagazione) o puramente reale (attenuazione), rimanendo così ben definita la frequenza di cutoff di quel certo modo, f_c ($\omega_c = 2\pi f_c$).

Se nel dielettrico si hanno perdite quanto visto non è più vero, infatti è:

$$K_z = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon_c - K_t^2} = \sqrt{-K_t^2 - \omega^2 \mu \varepsilon + j\omega\mu g} = \alpha_z + j\beta_z$$

K_z risulta complesso, essendo il radicando dato dalla somma di una quantità reale (positiva per $\omega < \omega_c$, negativa per $\omega > \omega_c$) e di una immaginaria (legata a $g \neq 0$).

Se le dissipazioni sono piccole, il caso reale non si discosta troppo da quello ideale, a patto di trovarsi lontano dalla ω_c; cioè per $\omega \gg \omega_c$ abbiamo $K_z \cong j\,\beta_z$ e per $\omega \ll \omega_c$ abbiamo $K_z \cong \alpha_z$.

(Ciò può facilmente vedersi analizzando l'espressione di K_z sul piano complesso)

Le differenze tra il caso reale e ideale non sono più trascurabili spesso nella zona in cui $\omega \cong \omega_c$, in quanto la costante di propagazione K_z per $\omega - \omega_c$ in realtà non è più nulla, ma ha ancora una parte reale ed una immaginaria (dello stesso ordine di grandezza): nel caso reale, cioè, per $\omega = \omega_c$ si ha $\alpha_z = \beta_z = \sqrt{\omega_c\, \mu g/2} \neq 0$. Ovviamente questa diversità ha un carattere teorico, giacchè per $g \cong 0$ e $\omega = \omega_c$, K_z risulterà molto piccolo in modulo ($\alpha_z \cong 0, \beta_z \cong 0$) tanto da poter essere spesso considerato nullo (ancora come nel caso ideale), in quanto le perdite relative possono ritenersi sufficientemente basse.

Nell'ipotesi di dielettrico non dissipativo $g = 0$ le dissipazioni, come già detto, saranno collegate alla conducibilità non infinita del contorno metallico.

Ciò può essere spiegato fisicamente con le seguenti considerazioni: è noto[19] che nell'attraversare una superficie di discontinuità la componente tangenziale di $\underline{H}$ subisce una variazione, uguale alla densità lineare di corrente $\underline{J}_s$ che scorre sulla superficie stessa; cioè: $\underline{n}_o \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \underline{J}_s$ (la $\underline{J}_s$, detta anche per brevità, "*corrente superficiale*", ha le dimensioni di $\underline{H}$: $[A\,m^{-1}]$); per ciò che riguarda l propagazione delle onde in guida, questa corrente scorre sulla superficie metallica in contatto con il dielettrico, confinando in pratica tutto il campo *e.m.* all'interno della guida (ci si avvicina alla condizione ideale quanto più "g" è alta, poiché in effetti $\underline{J}_s$ tende a essere priva di spessore, con $\underline{H}$ ed $\underline{E}$ nulli all'interno del conduttore). Avendo il mantello una conducibilità finita (ancorchè elevata) la $\underline{J}_s$ provoca una dissipazione di energia per effetto *Joule*: a fini della propagazione avremo una attenuazione nella K_z che, come già detto, risulta spesso ben maggiore di quella dovuta al dielettrico.

In altri termini, la presenza della corrente superficiale su un conduttore non perfetto implica la esistenza di un campo elettrico tangenziale non nullo su di esso: $\underline{E}_\tau$ è legato a $\underline{J}_s$ tramite l'impedenza caratteristica del mezzo metallico (onda piana uniforme):

$$Z_m = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\mu + g}}$$

, che essendo $g \gg \omega\varepsilon$ e $\sqrt{j} = (1+j)/\sqrt{2}$ diviene:

$$\boxed{Z_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{g}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}}$$

La Z_m ha la stessa parte reale e reattiva.

Pertanto, per $g \neq \infty$ esisterà sul bordo un campo elettrico tangente $\underline{E}_t = Z_m \underline{J}_s$. Come si vedrà, potendo considerarsi in pratica nullo il campo magnetico nel metallo ($\underline{n}_o \times \underline{H}_\tau = \underline{J}_s$, dove $\underline{H}_\tau$ è il campo m- nel dielettrico), si ricava la relazione approssimata per il campo elettrico tangenziale:

[19] cfr. ad es. Barzilai, op cit., 11.11; Collin, op.cit.,2.6

$$\underline{E}_\tau = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\,\underline{n}_o \times \underline{H}_\tau, \qquad \text{Relazione di Lentovich}^{20}$$

(Relazione che lega il campo *e.m.* sulla superficie di un buon conduttore).

Si noti che il caso ideale di $g = \infty$ fornisce ancora $\underline{E}_\tau = 0$.

Giacché è $\underline{P} = \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right)$, dalla condizione di *Lentovich* si deduce che il vettore di *Poynting* ha una componente diretta normalmente alla superficie del conduttore cui corrisponde un flusso di potenza attraverso il metallo e in cui si dissipa per effetto *Joule* in un certo spessore della guida.

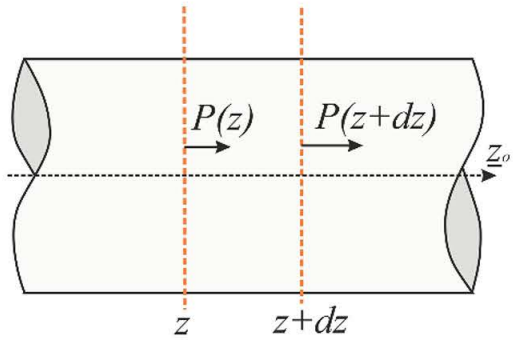


Figura 5.13 – Potenza attraverso le sezioni di una guida

Nelle espressioni qui utilizzate si è considerato il verso di $\underline{n}_o$ orientato dal conduttore al dielettrico.

Per l'esame delle perdite sulle pareti del conduttore, nel solito sistema di riferimento, consideriamo un tratto di guida lunga dz, in corrispondenza delle quote z e $z + dz$ (vedi fig. 5.13).

La potenza media che transita attraverso la sezione di superficie S, alla generica z, è data dalla parte reale del flusso del vettore di *Poynting* attraverso la sezione:

$$P(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_S \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{z}_o \; dS\right\}, \qquad [W]$$

La potenza calcolata nella quota $z + dz$ incrementata sarà esprimibile in prima approssimazione dalla:

$$P(z+dz) = P(z) + dP(z)$$

Nel caso di propagazione secondo le z positive, la potenza in una sezione $z + dz$ (maggiore di z) risulterà, in virtù delle dissipazioni, minore di quella calcolata in z, per cui $dP(z)$ sarà negativa:

[20] Vedi "*Campi Elettromagnetici*" pag. 141-142

essa rappresenta, cambiata di segno, la potenza che si dissipa in un tratto di guida lungo dz.

La potenza dissipata per unità di lunghezza sarà quindi:

$$P_d(z) = \frac{P(z+dz) - P(z)}{dz} = -\frac{dP(z)}{dz}, \qquad [Wm^{-1}]$$

Analizzando il valore di queste grandezze, nell'ipotesi semplificatrice di presenza di sola onda progressiva (propagazione esclusivamente secondo $+\underline{z}_o$: l'assenza di riflessioni può fisicamente interpretarsi come guida adattata perfettamente ovvero di lunghezza infinita). In tal caso la legge di variazione longitudinale dei campi è data dalla:

$$Z_e(z) = Z_h(z) = Z(z) = P_2 e^{-K_z z} = P_2 e^{-\alpha_z z} e^{-j\beta_z z}$$

Essendo genericamente presente un'attenuazione α_z da determinare.

In tale ipotesi il campo *e.m.* trasverso può esprimersi attraverso le due equazioni:

$$\underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z(z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, P_2 e^{-K_z z}$$
$$\underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z(z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, P_2 e^{-K_z z}$$

I campi trasversi sono legati tra loro tramite le impedenze d'onda:

$$\underline{E}_t = \frac{j\omega\mu}{K_z}\underline{H}_t \times \underline{z}_o = Z_{TE}^{(+)}\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right), \qquad \text{per onde TE dirette}$$

$$\underline{E}_t = \frac{K_z}{j\omega\varepsilon_c}\underline{H}_t \times \underline{z}_o = Z_{TM}^{(+)}\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right), \qquad \text{per onde TM dirette}$$

Le precedenti relazioni possono compattarsi per un generico campo (***TE*** o ***TM***) della guida d'onda nella:

$$\underline{E}_t = Z_W\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right)$$

Dove con Z_W si è indicata l'impedenza d'onda (che per un'onda ***TE*** coinciderà con $j\omega\mu/K_z$ mentre per un'onda ***TM*** con $K_z/j\omega\varepsilon_c = K_z/j\omega\varepsilon$, avendo supposto in questo caso il dielettrico perfetto).

In questo modo l'espressione della $P(z)$ può riscriversi:

$$P(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_S \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{z}_o \; dS\right\} = \mathrm{Re}\left\{\int_S \frac{1}{2}\left[\left(\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z\right) \times \left(\underline{H}_t + \underline{z}_o H_z\right)^*\right] \cdot \underline{z}_o \; dS\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int_S \frac{1}{2} Z_W \left[\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right) \times \underline{H}_t^{\,*}\right] \cdot \underline{z}_o \; dS\right\}$$

(sviluppando il prodotto vettoriale $\left(\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z\right) \times \left(\underline{H}_t + \underline{z}_o H_z\right)^*$ si vede facilmente che l'unico vettore avente componente lungo $\underline{z}_o$ risulta $\underline{E}_t \times \underline{H}_t^{\,*}$).

Per la nota proprietà vettoriale $\underline{A} \times \underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C}$, la $P(z)$ diviene

$$P(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_S \frac{1}{2} Z_W \left[\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right) \cdot \left(\underline{H}_t^{\,*} \times \underline{z}_o\right)\right] \; dS\right\}$$

Si può notare che $\underline{H}_t \times \underline{z}_o$ rappresenta un vettore che ha lo stesso modulo di $\underline{H}_t$, giacendo ancora sul piano trasversale e ruotato rispetto a $\underline{H}_t$ di 90° in senso orario (osservandolo dal verso delle z crescenti); nello stesso modo abbiamo che $\underline{H}_t^{\,*} \times \underline{z}_o$ coincide con $\underline{H}_t^{\,*}$ ruotato sempre di un angolo retto.

Pertanto, il prodotto scalare tra $\underline{H}_t \times \underline{z}_o$ e $\underline{H}_t^{\,*} \times \underline{z}_o$ assume lo stesso valore del prodotto scalare tra $\underline{H}_t$ e $\underline{H}_t^{\,*}$, cioè:

$$\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right) \cdot \left(\underline{H}_t^{\,*} \times \underline{z}_o\right) = \underline{H}_t \cdot \underline{H}_t^{\,*} \;\; \text{(quantità reale)}$$

Per cui, per la potenza reale $P(z)$ transitante attraverso S, sia ha:

$$P(z) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{Z_W\} \int_S \underline{H}_t \cdot \underline{H}_t^{\,*} \; dS$$

In tale espressione si può notare la dipendenza esplicita della potenza dal campo *e.m.* è stata espressa tramite la sola componente trasversa del campo magnetico (ciò, come vedremo in seguito, risulterà molto comodo).

Un'analoga forma per la $P(z)$ si puoteva esprimere in funzione del solo campo trasverso, essendo:

$$\underline{E}_t = Z_W\left(\underline{H}_t \times \underline{z}_o\right) \rightarrow \underline{H}_t = \frac{1}{Z_W}\left(\underline{z}_o \times \underline{E}_t\right) = Y_W\left(\underline{z}_o \times \underline{E}_t\right) \rightarrow P(z) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{Y_W^*\} \int_S \underline{E}_t \cdot \underline{E}_t^{\,*} \; dS$$

Esplicitiamo la componente longitudinale della $P(z)$:

$$P(z) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{Z_W\} \int_S \underline{h}_t(q_1, q_2) P_2 e^{-K_z z} \cdot \underline{h}_t^*(q_1, q_2) P_2^* e^{-K_z^* z} \; dS =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{Z_W\} P_2 P_2^* e^{-(\alpha_z + j\beta_z) z} e^{-(\alpha_z - j\beta_z) z} \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \; dS = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{Z_W\} P_2 P_2^* e^{-2\alpha_z z} \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \; dS$$

La potenza dissipata nella guida per unità di lunghezza diverrà:

$$P_d(z) = -\frac{dP(z)}{dz} = 2\alpha_z P(z)$$

Ciò permette di esplicitare l'importante relazione su α_z

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)}, \qquad [m^{-1}]$$

La costante di attenuazione α_z è definita dal rapporto (dimezzato) tra la potenza dissipata per unità di lunghezza del conduttore e la potenza transitante nella guida. Le sue dimensioni sono quelle dell'inverso di una lunghezza $[m^{-1}]$ essendo definita dal rapporto tra una potenza per unità di lunghezza e una potenza.

Per questo motivo si introducono spesso per la misura di α_z le "*unità logaritmiche*".

Date due generiche potenze, dette rispettivamente *di ingresso* (P_1) e *di uscita* (P_2), si definisce "*attenuazione di potenza in Neper*" la grandezza dimensionale:

$$A_p^{(Np)} = \frac{1}{2}\ln_e\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Analogamente si può considerare "*l'attenuazione di potenza in decibel*" la

$$A_p^{(Np)} = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Si calcola facilmente che $1dB = 8{,}686\ Np$, ovvero $1Np = 0{,}115\ dB$.

Nel nostro caso, considerata come P_1 la $P(z)$ per $z = 0$ e come P_2 la $P(z)$ per $z = \overline{z}$, si ricava che l'attenuazione in Neper risulta data proprio da:

$$A^{(Np)} = \alpha_z \overline{z}$$

La α_z ci quantifica l'entità delle dissipazioni energetiche nella guida e pertanto si cercherà per essa un'espressione più significativa in pratica.

A tal fine, dopo aver calcolato la forma assunta in genere dalla $P(z)$, vogliamo esprimere anche la $P_d(z)$ in funzione del campo *e.m.*. La potenza dissipata in un tratto di guida di sezione S e di lunghezza dz, $P(z) - P(z+dz) = P_d(z)dz$; è la parte reale del flusso del vettore di *Poynting* attraverso

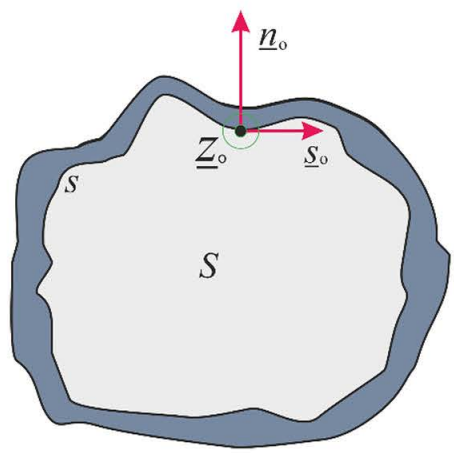


Figura 5.14 – sezione di una guida generica

la superficie laterale di area "*Lunghezza di S*" $\cdot\, dz$ (il cui elemento infinitesimo è dato da $ds \cdot dz$; cioè:

$$P(z) - P(z+dz) = P_d(z)dz = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{n}_o \, ds \, dz\right\}$$

$$P_d(z) = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{n}_o \, ds\right\}$$

La $P_d(z)$ può considerarsi come il flusso di $\underline{P}$ uscente dal contorno della guida (curva s per cui è definito un versore tangente $\underline{s}_o$ e uno normale esternamente $\underline{n}_o$ tale che sia abbia ad esempio $\underline{s}_o \times \underline{n}_o = \underline{z}_o$, vedi fig. 5.14)

Si vede che le componenti del campo *e.m.* capaci di fornire un contributo non nullo per il flusso attraverso s lungo $\underline{n}_o$, sono solo quelle tagenti al mantello metallico (che verranno indicate come: $\underline{E}_\tau(q_1, q_2, z)$ e $\underline{H}_\tau(q_1, q_2, z)$; si ha perciò:

$$P_d(z) = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{n}_o \, ds\right\} = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{E}_\tau \times \underline{H}_\tau{}^*\right) \cdot \underline{n}_o \, ds\right\}$$

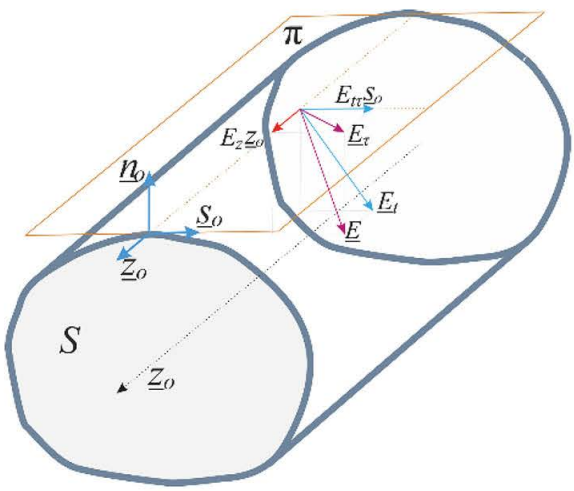


Figura 5.15 – componenti tangenziali di $\underline{E}$

Il generico vettore tangenziale $\underline{E}_\tau$ *o* $\underline{H}_\tau$ può essere sempre scomposto in due componenti secondo $\underline{s}_o$ e $\underline{z}_o$ (come illustrato in figura 5.15).

Dati infatti i campi *e.m.* sul contorno:

$$\underline{E} = \underline{E}_t + E_z \, \underline{z}_o$$
$$\underline{H} = \underline{H}_t + H_z \, \underline{z}_o$$

I vettori $\underline{E}_\tau$ e $\underline{H}_\tau$ si ottengono proiettando rispettivamente $\underline{E}$ e $\underline{H}$ sul piano tangente, individuato dai versori $\underline{s}_o$ e $\underline{z}_o$; pertanto $\underline{E}_\tau$ (o $\underline{H}_\tau$) ha una componente lungo $\underline{z}_o$, pari a E_z (o H_z) ed una lungo $\underline{s}_o$, che è la proiezione di $\underline{E}_t$ (o $\underline{H}_t$) su $\underline{s}_o$ (che indicheremo con $\underline{E}_{t\tau}$=$\underline{E}_t \cdot \underline{s}_o$; o $\underline{H}_{t\tau} = \underline{H}_t \cdot \underline{s}_o$).

Potremo scrivere pertanto:

$$\underline{E}_\tau = \left(\underline{E}_t \cdot \underline{s}_o\right) \underline{s}_o + E_z \, \underline{z}_o = \underline{E}_{t\tau} \, \underline{s}_o + E_z \, \underline{z}_o$$
$$\underline{H}_\tau = \left(\underline{H}_t \cdot \underline{s}_o\right) \underline{s}_o + H_z \, \underline{z}_o = \underline{H}_{t\tau} \, \underline{s}_o + H_z \, \underline{z}_o$$

Come detto, nel caso ideale ($g = \infty$) $\underline{E}_\tau$ sarebbe nullo e non si avrebbe perciò dissipazione di potenza nel mantello.

In realtà sulle pareti del conduttore (con g alto ma finito) esiste un campo *e.m.*, legato dalla relazione di *Lentovich*:

$$\underline{E}_\tau = Z_m\left(\underline{H}_\tau \times \underline{n}_o\right)$$

Dove l'impedenza del metallo, essendo $g \gg \omega\mu$, può scriversi come:

$$Z_m = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\mu + g_m}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{g_m}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g_m}}$$

Si ricordi che sia ha:

$$\sqrt{j} = \left|\sqrt{|j|}\right|\left(\cos\frac{\arg j}{2} + j\sin\frac{\arg j}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{j} = \left|\sqrt{|j|}\right|\left(\cos\frac{2\pi + \arg j}{2} + j\sin\frac{2\pi + \arg j}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}(-1)$$

Avendo scelto per $\sqrt{j} = \pm\frac{1+j}{\sqrt{2}}$ la soluzione con parte reale immaginaria positiva.

La Z_m è determinata per ogni frequenza dalle caratteristiche proprie del conduttore; il valore della permeabilità per i materiali metallici usati in pratica (rame, argento, ottone, alluminio, etc.) qualora non si utilizzino sostanze ferromagnetiche, potremo indicare con μ la permeabilità di qualsiasi materiale presente nella guida.

La condizione di Lentovich ci permette di esprimere la $P_d(z)$ in funzione del solo campo magnetico tangenziale $\underline{H}_\tau$; si ha:

$$P_d(z) = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{E}_\tau \times \underline{H}_\tau^*\right)\cdot\underline{n}_o\, ds\right\} = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{1}{2}Z_m\left[\left(\underline{H}_\tau \times \underline{n}_o\right)\times\underline{H}_\tau^*\right]\cdot\underline{n}_o\, ds\right\}$$

Ricordando l'ormai nota identità $\underline{A}\times\left(\underline{B}\times\underline{C}\right) = \underline{B}\left(\underline{A}\cdot\underline{C}\right) - \underline{C}\left(\underline{A}\cdot\underline{B}\right)$, ed essendo $\mathrm{Re}\{Z_m\} = \sqrt{\omega\mu/2g_m}$, la $P_d(z)$ diviene:

$$P_d(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g_m}}\,\mathrm{Re}\left\{\oint_S -\underline{H}_\tau^*\times\left(\underline{H}_\tau\times\underline{n}_o\right)\cdot\underline{n}_o\, ds\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g_m}}\,\mathrm{Re}\left\{\oint_S \underline{n}_o\cdot\left(\underline{H}_\tau\cdot\underline{H}_\tau^*\right)\cdot\underline{n}_o\, ds\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g_m}}\oint_S \underline{H}_\tau\cdot\underline{H}_\tau^*\, ds$$

Possiamo così esplicitare la α_z in funzione delle espressioni trovate per $P_d(z)$ e $P(z)$:

$$\boxed{\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\omega\mu'}{2g_m}}\oint_S \underline{H_\tau}\cdot\underline{H_\tau^*}\,ds}{\mathrm{Re}\{Z_W\}\int_S \underline{H_t}\cdot\underline{H_t^*}\,dS}}$$

Per calcolare la costante di attenuazione α_z, tramite l'espressione ricavata è necessario conoscere il valore effettivo del campo *e.m.* in ogni punto della guida reale: tale determinazione è generalmente assai difficile dal punto di vista analitico (a tal fine si dovrebbero infatti modificare opportunamente le condizioni al contorno già considerate nel caso di struttura ideale con le ovvie conseguenze per le componenti dei campi *e.m.*; $e_z = 0$ per onde ***TM*** e $\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0$ per onde ***TE*** su S).

L'aver espresso α_z in funzione del solo campo magnetico (si è eliminata la presenza del campo elettrico con l'introduzione delle impedenze Z_m e Z_W) ci permette però di formulare la seguente fondamentale ipotesi semplificante: giacché la differenza tra campo magnetico ideale e reale è in pratica poco apprezzabile, nel calcolo della potenza supporremo di poter usare con buona approssimazione le espressioni ricavabili dal caso ideale per $\underline{h_t}$ e $\underline{h_\tau}$ (*metodo di perturbazione*)

Ovviamente tale ipotesi riferita al campo elettrico non fornirebbe un'approssimazione del caso reale: infatti con $\underline{E_\tau} = 0$ (situazione ideale) non si avrebbe affatto dissipazione di potenza (questo è il motivo per cui viene espressa in funzione dei campi magnetici e non elettrici).

Introdotta questa approssimazione sul campo magnetico, vogliamo ora particolarizzare l'espressione di α_z al caso interessante di onde ***TE*** e ***TM***.

6.8 Onde TE (solo onda diretta)

Nell'ipotesi poste, ricordando che in propagazione è $K_z = j\beta_z$:

$$\mathrm{Re}\{Z_W\} = \mathrm{Re}\{Z_{TE}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{j\omega\mu}{K_z}\right\} = \frac{\omega\mu}{\beta_z}$$

$$\underline{H_t} = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h_t}, \qquad \underline{H_\tau} = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h_\tau}$$

Possiamo scrivere per α_z:

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\omega\mu'}{2g'}}\oint_S P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_\tau \cdot P_2^*\, e^{-K_z^* z}\underline{h}_\tau^*\, ds}{\frac{\omega\mu}{\beta_z}\int_S P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_t \cdot P_2^*\, e^{-K_z^* z}\underline{h}_t^*\, dS}, \qquad posto\ \mu = \mu'$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\beta_z}{\omega\mu}\frac{P_2 P_2^* e^{-K_z z}e^{-K_z^* z}\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^*\, ds}{P_2 P_2^* e^{-K_z z}e^{-K_z^* z}\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*\, dS} = \frac{\beta_z}{\sqrt{8g\omega\mu}}\frac{\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^*\, ds}{\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*\, dS}$$

Gli integrali di quell'ultima espressione possono essere ulteriormente sviluppati: i modi ***TE*** sono determinati dalle autosoluzioni dell'equazione di *Helmholtz*: $\nabla_t^2 h_z = K_t^2 h_z$, con la condizione $\partial h_z/\partial n = 0$ su s (caso ideale). In particolare, si ha, noto h_z:

$$\underline{h}_t = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t h_z$$

Riferendoci alla componente tangenziale può scriversi:

$$\underline{H}_\tau = \left(\underline{H}_t \cdot \underline{s}_o\right) + H_z\,\underline{z}_o = \left(Z_h\,\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o\right)\underline{s}_o + Z_e\,h_z\,\underline{z}_o = Z(z)\left[\left(\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o\right)\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o\right]$$

$$\underline{h}_\tau = \left(\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o\right)\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o$$

Pertanto, la $\underline{h}_\tau(q_1, q_2)$ diviene:

$$\underline{h}_\tau = \left(\frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t h_z \cdot \underline{s}_o\right)\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o = \frac{K_z}{K_t^2}\frac{\partial h_z}{\partial s}\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o$$

In questa forma le componenti magnetiche $\underline{h}_t$ e $\underline{h}_\tau$ sono tutte espresse in funzione di $h_z(q_1, q_2)$, il metodo di perturbazione ci permette di considerare la soluzione ideale del campo magnetico trasverso: possiamo quindi ritenere h_z un'autofunzione reale, essendo K_t^2 reale negativo e $K_z = j\,\beta_z$ immaginario puro (cfr. pag 55).

Con tali precisazioni, riscriviamo α_z come:

$$\alpha_z = \frac{\beta_z}{\sqrt{8g\omega\mu}}\frac{\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^*\, ds}{\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*\, dS} = \frac{\beta_z}{\sqrt{8g\omega\mu}}\frac{\oint_S \left(\frac{K_z}{K_t^2}\frac{\partial h_z}{\partial s}\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o\right)\cdot\left(\frac{K_z^*}{K_t^2}\frac{\partial h_z}{\partial s}\underline{s}_o + h_z\,\underline{z}_o\right) ds}{\int_S \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t h_z \cdot \frac{K_z^*}{K_t^2}\nabla_t h_z\, dS}$$

Ricordando che $\underline{s}_o \perp \underline{z}_o$, dallo sviluppo dei prodotti scalari segue:

$$\alpha_z = \frac{\beta_z}{\sqrt{8g\omega\mu}}\frac{\oint_S \left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 + h_z^2\right] ds}{\int_S \frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left|\nabla_t h_z\right|^2\, dS} = \frac{\beta_z}{\sqrt{8g\omega\mu}}\frac{\frac{1}{K_t^4}\left[\beta_z^2\oint_S\left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 ds + K_t^4\oint_S h_z^2\, ds\right]}{\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\int_S \left|\nabla_t h_z\right|^2\, dS} =$$

$$= \frac{1}{2\beta_z\sqrt{2g\omega\mu}} \frac{\beta_z^2 \oint_S \left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 ds + K_t^4 \oint_S h_z^2 \, ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS}$$

Con ciò si può osservare che la costante di attenuazione α_z per i modi ***TE*** dipende dalla frequenza (anche tramite la β_z essendo la struttura dispersiva), dalle caratteristiche fisiche (la permeabilità μ e la conducibilità g del metallo) e dalla forma e dimensioni della sezione della guida (mediante K_t e i domini d'integrazione)

Ricordiamo che l'espressione di α_z è stata trovata con riferimento a una guida d'onda a simmetria cilindrica di sezione generica, avente il metallo costituito da un buon conduttore non ferromagnetico e un dielettrico perfetto; relativamente alla propagazione diretta, si è considerato il campo magnetico trasversale ideale, essendo valida sulla superficie metallica la condizione di *Lentovich*.

È di fondamentale importanza in pratica analizzare l'andamento di α_z come somma dei due termini:

$$\alpha_z = \frac{\beta_z}{2\sqrt{2g\omega\mu}} \frac{\oint_S \left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS} + \frac{K_t^4}{2\beta_z\sqrt{2g\omega\mu}} \frac{\oint_S h_z^2 \, ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS}$$

Indichiamo per brevità il primo addendo con $L(\omega)$, il secondo con $C(\omega)$ e studiamoli separatamente.

6.8.1 Correnti Longitudinali

$$L(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2g}} \frac{\oint_S \left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\sqrt{\omega}}, \qquad \text{con } \omega \geq \omega_c$$

Avendo usato per $\beta_z(\omega)$ la relazione (cfr. pag. 59):

$$\beta_z(\omega) = \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}, \qquad \text{per } \omega \geq \omega_c$$

(Nelle condizioni poste siamo interessati unicamente alle frequenze per cui sia ha propagazione, corrispondenti a $\omega \geq \omega_c$)

La dipendenza di $L(\omega)$ da ω è del seguente tipo:

$$L(\omega) = C_1 \sqrt{\omega - \frac{\omega_c^2}{\omega}}$$

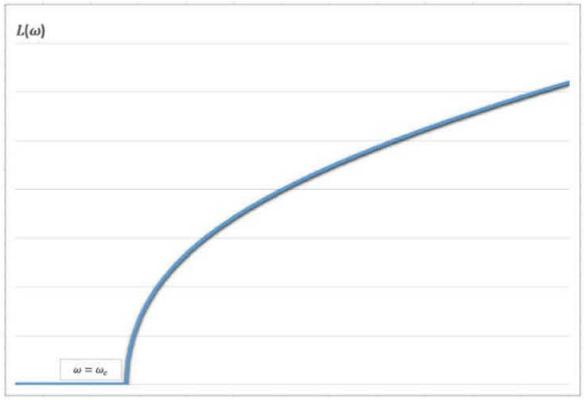


Figura 5.16 – Andamento L(ω)

Il suo andamento è facilmente deducibile: la $L(\omega)$ giace interamente nel primo quadrante annullandosi per $\omega = \omega_c$, per $\omega \to \infty$ diverge (con ordine ½). La funzione è sempre crescente (la derivata prima è ovunque positiva) e ha la concavità rivolta sempre verso il basso (la derivata seconda è ovunque negativa): da ciò segue il grafico in fig. 5.16

6.8.2 Correnti Circonferenziali

$$C(\omega) = \frac{K_t^4}{2\mu\sqrt{2g\varepsilon}} \frac{\oint_S h_z^2 \, ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS} \frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}, \qquad \text{con } \omega > \omega_c$$

La $C(\omega)$ è una funzione del tipo:

$$C(\omega) = \frac{C_2}{\sqrt{\omega^3 - \omega_c^2 \omega}}, \qquad \text{con } \omega > \omega_c$$

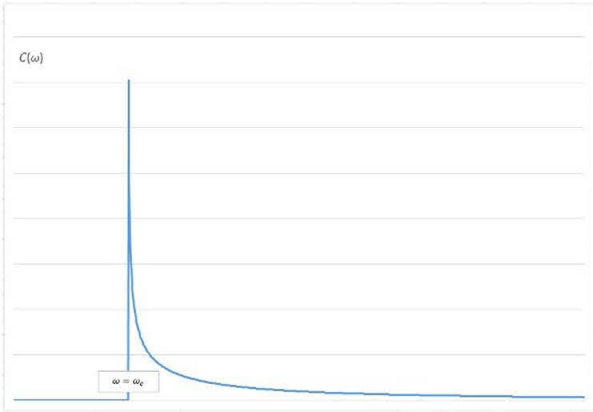


Figura 5.17 – Andamento C(ω)

Anch'essa giace nel primo quadrante, per $\omega \to \omega_c$ diverge (con ordine 1), per $\omega \to \infty$ è un infinitesimo (con ordine $\frac{3}{2}$). La $C'(\omega)$ è sempre negativa, la $C''(\omega)$ è ovunque positiva. La $C(\omega)$ è dunque desrescente ed ha la concavità verso l'alto.

Si ha in merito il grafico di fig. 5.17

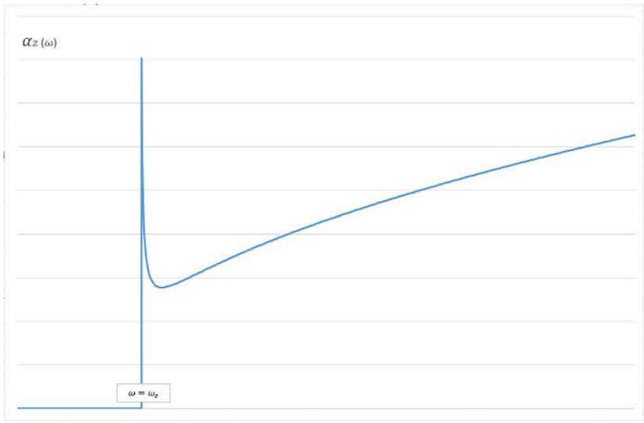


Figura 5.18 – Andamento $\alpha_z(\omega)$

Siamo ora in grado di rappresentare graficamente la funzione

$$\alpha_z(\omega) = L(\omega) + C(\omega)$$

Dall'esame grafico di $\alpha_z(\omega)$, composto per ogni $\overline{\omega}$ dalla somma dei valori rispettivi di $L(\overline{\omega})$ e $C(\overline{\omega})$, si può vedere che l'attenuazione per unità di lunghezza per i modi ***TE*** in guida reale, è molto elevata in prossimità della frequenza critica (cutoff); si ha poi una banda relativamente ampia in cui α_z è più bassa (intorno agli 1,2 ÷ 1,8 della ω_c, dove si ha un minimo per α_z); quindi crese ancora con la frequenza.

In relazione a quanto detto (cfr. anche pag. 61), le guide d'onda saranno generalmente utilizzate (con le precisazioni e le eccezioni che saranno più chiare in seguito) proprio nella succitata banda di minima dissipazione.

In relazione al modo con cui si è espressa $\alpha_z(\omega)$, si può precisare meglio l'interpretazione fisica delle perdite energetiche.

L'attenuazione per unità di lunghezza è infatti composta da due termini:

- il primo, indicato con $L(\omega)$, è legato all'intergrale di linea $\partial h_z/\partial s$, ovvero di $\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o = h_{t\tau}$ (componente tangenziale del campo magnetico trasverso $\underline{h}_t$);
- il secondo, $C(\omega)$, è invece legato a h_z (componente assiale del campo magnatico).

Riferendoci alle correnti che scorrono sul mantello della guida reale relative a tali campi, dalla legge di Ampere si deduce facilmente che il campo magnetico tangenziale trasverso (di $h_{t\tau}\,\underline{s}_o$ su s) è collegato a una corrente sul conduttore diretta secondo $\underline{z}_o$ (corrente longitudinale); il campo magnetico tangenziale longitudinale ($h_z\,\underline{z}_o$ su s) è collegato a una corrente sul conduttore diretta trasversalmente, perpendicolare cioè a $\underline{z}_o$ (*corrente Circonferenziale*).

Da questo punto di vista le perdite energetiche possono vedersi come dissipazioni per effetto *Joule*, separatamente delle correnti longitudinali e circonferenziali che scorrono sul mantello (costituito da un buon conduttore) della guida d'onda.

L'esame delle attenuazioni dovute alle correnti longitudinali e circonferenziali (espresse rispettivamente da $L(\omega)$ e $C(\omega)$), mostra che per i modi ***TE***, intorno alla frequenza di cutoff, l'attenuazione è dovuta solo alle correnti circonferenziali ($\lim_{\omega\to\omega_c} L(\omega) = 0$; $\lim_{\omega\to\omega_c} C(\omega) = \infty$), che risulteranno di intensità alquanto elevata.

Crescendo sempre più la frequenza, l'attenuazione viene invece a dipendere in massima parte dalle correnti longitudinali sempre maggiori di intensità ($\lim_{\omega\to\infty} L(\omega) = \infty$; $\lim_{\omega\to\infty} C(\omega) = 0$).

Come vedremo, tale circostanza è stata sfruttata per ottenere modi con attenuazione sempre minore all'aumentare della frequenza (trasmissione in guida a grande distanza), attraverso particolari configurazioni ***TE*** in cui non si abbiano correnti longitudinali, cioè $h_{t\tau} = 0$ (cfr. in seguito le guide d'onda circolari).

6.9 Onde TM

Con le solite ipotesi (metodo di perturbazione, etc.) avremo per i modi ***TM***:

$$\mathrm{Re}\{Z_W\} = \mathrm{Re}\{Z_{TM}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{K_z}{j\omega\varepsilon}\right\} = \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon}$$

(ancora l'ultima uguaglianza precedente è valida in propagazione $K_z = j\,\beta_z$)

$$\underline{H}_t = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_t, \qquad \underline{H}_\tau = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_\tau$$

In questo caso, essendo $h_z = 0$ per i modi ***TM***, si ha per $\underline{H}_\tau$:

$$\underline{H}_\tau = (\underline{H}_t \cdot \underline{s}_o)\underline{s}_o = (Z_h\, \underline{h}_t \cdot \underline{s}_o)\, \underline{s}_o \Longrightarrow \underline{h}_\tau = (\,\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o)\, \underline{s}_o$$

Per cui nei modi ***TM*** la $\underline{h}_\tau$ sul conduttore è data dalla componente tangenziale del campo magnetico trasverso $\underline{h}_t$;

cioè $\underline{h}_\tau = \underline{h}_{t\tau}$. Con procedimento del tutto analogo al caso delle onde ***TE*** è:

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\oint_S \underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*\, ds}{\frac{\beta_z}{\omega\varepsilon}\int_S \underline{H}_t \cdot \underline{H}_t^*\, dS} = \frac{1}{2}\frac{\omega\varepsilon}{\beta_z}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^*\, ds}{\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*\, dS}$$

Come è noto per le onde ***TM*** dalla: $\nabla_t^2 e_z = K_t^2 e_z$, con $e_z = 0$ su s, è possibile ricavare le componenti del campo trasverso, in particolare

$$\underline{h}_t = \frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\underline{z}_o \times \nabla_t e_z \rightarrow \underline{h}_\tau = \left(\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o\right)\underline{s}_o = \left[\left(\frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\underline{z}_o \times \nabla_t e_z\right)\cdot \underline{s}_o\right]\underline{s}_o = \left(\frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\underline{s}_o \cdot \underline{z}_o \times \nabla_t e_z\right)\underline{s}_o =$$

$$= \left(\frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\underline{s}_o \times \underline{z}_o \cdot \nabla_t e_z\right)\underline{s}_o = \left(\frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\underline{n}_o \cdot \nabla_t e_z\right)\underline{s}_o = \frac{j\omega\varepsilon}{K_t^2}\frac{\partial e_z}{\partial n}\underline{s}_o$$

Anche in questo caso l'autofunzione che compare nell'espressione di α_z può ritenersi reale, con K_t^2 reale negativo e $K_z = j\,\beta_z$ immaginario.

Con ciò la α_z assume la forma:

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{\omega\varepsilon}{\beta_z}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\oint_S \frac{\omega^2\varepsilon^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial e_z}{\partial n}\right)^2 ds}{\int_S \frac{\omega^2\varepsilon^2}{K_t^4}\left(\underline{z}_o \times \nabla_t e_z\right)\cdot\left(\underline{z}_o \times \nabla_t e_z\right)^* dS} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2g}}\frac{\omega\sqrt{\omega}}{\beta_z}\frac{\oint_S \left(\frac{\partial e_z}{\partial n}\right)^2 ds}{\int_S |\nabla_t e_z|^2 \, dS}$$

In margine a questa espressione possono farsi analoghe considerazioni a quelle svolte per la α_z dei modi ***TE*** (limiti di validità, dipendenza dal mezzo, forma, etc.).

Anche qui è utile conoscere la variazione con la frequenza della costante di attenuazione.

La α_z, per $\omega \geq \omega_c$, può formalmente esprimersi come

$$\alpha_z(z) = C\sqrt{\frac{\omega^3}{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Il grafico di tale funzione è facilmente deducibile:

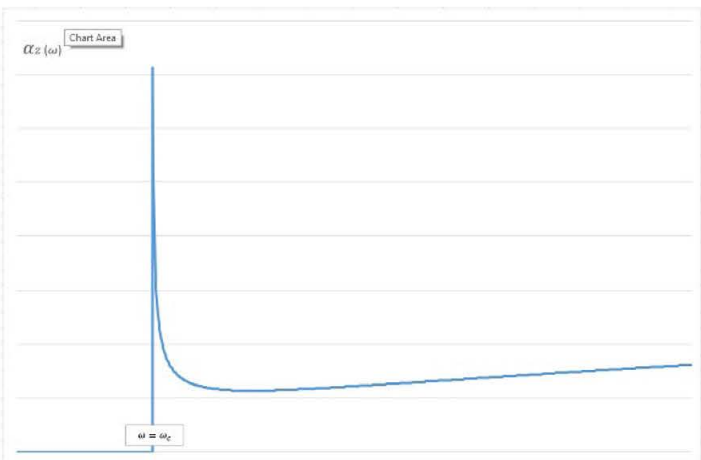


Figura 5.19 – Andamento $\alpha_z(\omega)$

essa giace interamente nel primo quadrante; quando $\omega \rightarrow \omega_c$ la α_z va all'infinito (con ordine 1); per $\omega \rightarrow \infty$ la α_z è ancora divergente (con ordine ½).

Lo studio della derivata prima individua un minimo assoluto, allorché $\omega = \sqrt{3}\,\omega_c$ (vedi fig. 5.19)

Diversamente da quanto avviene per le onde ***TE***, l'attenuazione per unità di lunghezza nelle ***TM***, essendo $h_z = 0$, è collegata esclusivamente alle correnti longitudinali relative al campo magnetico tangenziale, che è solo trasversale.

6.10 Onde TEM

L'analisi finora svolta sulle perdite energetiche relative ai modi in guida rimane sostanzialmente invariata per strutture costituite da due o più conduttori. L'espressione integrale ottenuta per α_z (cfr. pag 87) mantiene ancora la sua validità, dovendosi estendere l'integrazione di linea a tutti i contorni dei conduttori (con le solite convenzioni sugli orientamenti di $\underline{n}_o, \underline{s}_o, \underline{z}_o$ ad esempio $\underline{n}_o$ dretto diretto dal dielettrico al conduttore e $\underline{n}_o \times \underline{s}_o = \underline{z}_o$).

Di particolare interesse è in questo caso l'attenuazione per il modo ***TEM***, che in base a considerazioni svolte, risulta essere il dominante.

Per essa si ha (metodo di perturbazione) nel caso di onda diretta:

$$\mathrm{Re}\{Z_W\} = \mathrm{Re}\{Z_{TEM}\} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad \underline{H}_t = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_t, \qquad \underline{H}_\tau = P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_\tau \implies$$

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\oint_S P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_\tau \cdot P_2^*\, e^{-K_z^* z}\underline{h}_\tau^*\, ds}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S P_2\, e^{-K_z z}\underline{h}_t \cdot P_2^*\, e^{-K_z^* z}\underline{h}_t^*\, dS} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^*\, ds}{\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*\, dS}$$

Essendo:

$$\underline{h}_t = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\underline{z}_o \times \nabla_t \Phi, \qquad \underline{h}_\tau = (\underline{h}_t \cdot \underline{s}_o)\underline{s}_o = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\underline{z}_o \times \nabla_t \Phi \cdot \underline{s}_o)\underline{s}_o = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\underline{s}_o$$

Si ha infine:

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\oint_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 ds}{\int_S |\nabla_t \Phi|^2\, dS}$$

6.11 Ortogonalità dei modi non degeneri

Anche i modi degeneri possono essere ortogonali e quindi non accoppiati nelle perdite.

Vogliamo ora dimostrare che in una guida d'onda cilindrica ideale (struttura senza perdite: $g = \infty, \varepsilon_c = \varepsilon$), a sezione generica ogni modo trasporta energia indipendentemente dagli altri modi che contemporaneamente vi si propagano: *la potenza complessiva è cioè data dalla somma delle potenze trasportate da ciascun modo*, purché questi viaggino con diversa velocità di fase.

Come vedremo, ad eccezione del caso degenere, tale proprietà viene a coincidere con quella di ortogonalità dei modi, secondo la definizione:

$$\int_S \underline{E}_{(m)} \times \underline{H}^*_{(n)} \cdot \underline{z}_o \, dS = 0$$

Dove gli indici "m", "n" si riferiscono ai modi diversi.

Riferendoci alla solita struttura generica (in figura), supponiamo pertanto che in essa si possano propagare più modi, soluzioni linearmente indipendenti delle equazioni di *Maxwell*.

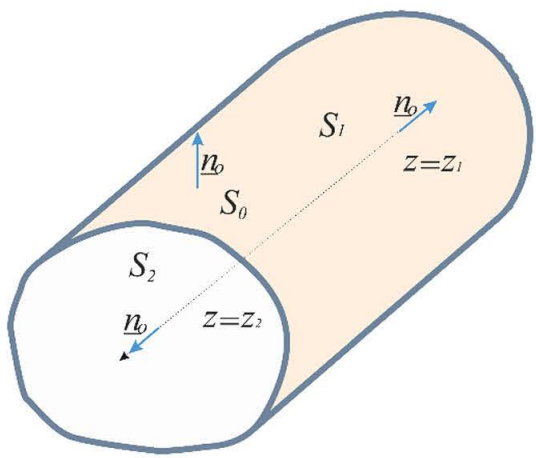


Figura 5.20 – struttura guidante generica

Considerati per semplicità due di questi, indichiamo con $\underline{E}_1, \underline{H}_1$ i campi relativi al primo modo e con $\underline{E}_2, \underline{H}_2$ quelli relativi al secondo. Per quanto detto essi soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu \, \underline{H}_1 \\ \nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon \, \underline{E}_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu \, \underline{H}_2 \\ \nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon \, \underline{E}_2 \end{cases}$$

Siamo interessati al calcolo della potenza trasportata dai due campi, allorché si propagano contemporaneamente. Definiamo il campo *e.m.* $\underline{E}, \underline{H}$, come la somma dei precedenti modi:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ \underline{H} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2 \end{cases}$$

Ovviamente le equazioni di *Maxwell*, per la loro linearità, sono ancora soddisfatte dal campo totale $\underline{E}, \underline{H}$.

Globalmente la potenza che attraversa la generica sezione S (reale o reattiva) è uguale al flusso del vettore di *Poynting*:

$$P = \frac{1}{2}\int_S \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{z}_o \, dS$$

Con le precedenti posizioni può essere scritto:

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_1 + \underline{E}_2\right) \times \left(\underline{H}_1 + \underline{H}_2\right)^* \cdot \underline{z}_o \, dS =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS + \frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_2 \times \underline{H}_2^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS + \frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS =$$

I primi due integrali ad ultimo membro rappresentano rispettivamente le potenze trasportate dal primo e dal secondo modo. Per asserire che la potenza totale è la somma di quelle relative ai singoli modi, è quindi necessario dimostrare che è sempre:

$$\frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = 0$$

Per ottenere ciò prendiamo in considerazione l'espressione:

$$\nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right)$$

Ricordando l'identità vettoriale (cfr. Barzilai: op. cit., pag. 29) $\nabla \cdot \left(\underline{A} \times \underline{B}\right) = \underline{B} \cdot \left(\nabla \times \underline{A}\right) - \underline{A} \cdot \left(\nabla \times \underline{B}\right)$, si ha:

$$\nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) = \nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^*\right) + \nabla \cdot \left(\underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) =$$

$$\underline{H}_2^* \cdot \nabla \times \underline{E}_1 - \underline{E}_1 \cdot \nabla \times \underline{H}_2^* + \underline{H}_1^* \cdot \nabla \times \underline{E}_2 - \underline{E}_2 \cdot \nabla \times \underline{H}_1^*$$

Introducendo nell'ultimo membro le espressioni dei *rotori derivabili* delle equazioni di *Maxwell* otteniamo:

$$\nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) = \underline{H}_2^* \cdot \left(-j\omega\mu \, \underline{H}_1\right) - \underline{E}_1 \cdot \left(-j\omega\varepsilon \, \underline{E}_2^*\right) + \underline{H}_1^* \cdot \left(-j\omega\mu \, \underline{H}_2\right) - \underline{E}_2 \cdot \left(-j\omega\varepsilon \underline{E}_1^*\right)$$

$$=$$

$$= -j\omega\mu \left(\underline{H}_2^* \cdot \underline{H}_1 + \underline{H}_1^* \cdot \underline{H}_2\right) + j\omega\varepsilon \left(\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2^* + \underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1^*\right)$$

I termini posti tra parentesi nell'ultima uguaglianza sono quantità reali (somma di due numeri complessi coniugati) per cui la divergenza dell'espressione considerata risulta sempre immaginaria o nulla.

Consideriamo ora la parte di guida d'onda di volume τ, avente superficie totale $S_{tot} = S_1 + S_2 + S_o$, dove S_1 e S_2 indicano rispettivamente le superfici delle sezioni in

corrispondenza alle quote $z = z_1$ e $z = z_2$, mentre S_o quella del mantello metallico, delimitato dalle stesse S_1 e S_2 (figura 1).

Con queste notazioni, applichiamo proprio al vettore $\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*$, relativamente al volume τ speificato, il teorema della divergenza[21]

$$\int_\tau \nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) d\tau = \int_{S_{tot}} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{n}_o \, dS$$

Dove $\underline{n}_o$ è il versore della normale uscente dalla superficie S_{tot} con riferimento alle notazioni di Figura 1 si ha:

$$\underline{n}_o = -\underline{z}_o \text{ su } S_1, \qquad \underline{n}_o = \underline{z}_o \text{ su } S_2, \qquad \underline{n}_o = \underline{n} \text{ su } S_o$$

Per quanto detto possiamo ancora scrivere:

$$\int_\tau \nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) d\tau =$$

$$= -\int_{S_1} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS + \int_{S_2} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS$$

$$+ \int_{S_o} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{n} \, dS$$

Poiché per ipotesi il conduttore metallico è perfetto ($g = \infty$), il flusso attraverso la superficie laterale S_o è nullo (giacché su una ***PEI*** si ha $\underline{E}_\tau = 0, \underline{H}_n = 0 \Longrightarrow \underline{E} \times \underline{H}^* \perp \underline{n}$).

Per le osservazioni svolte in precedenza la quantità:

$$-\int_{S_1} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS + \int_{S_2} \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS\,, \qquad (16.11.10)$$

Deve essere immaginaria o nulla (essendo l'integrale di $\nabla \cdot \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right)$, che è immaginaria o nulla, esteso a un dominio reale).

Per individuare le conseguenze che questa condizione implica per i campi, riferiamoci al caso interessante di propagazione ideale (quindi con $\omega > \omega_c \rightarrow K_z = j\,\beta_z$).

[21] Cfr. ancora ad es. Barzilai, op. cit., pag. 19

Nelle ipotesi che i due modi si propaghino nello stesso verso, ad esempio $+\underline{z}_o$, con diverse velocità di fase ($\beta_{z1} \neq \beta_{z2}$) esplicitiamo i campi in funzione della legge di variazione con z.

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = \underline{E}_{t1} + E_{z1}\,\underline{z}_o = P_2\,\underline{e}_{t1}\,e^{-j\beta_{z1}\,z} + P_2\,e_{z1}\,e^{-j\beta_{z1}\,z}\,\underline{z}_o \\ \underline{H}_1 = \underline{H}_{t1} + H_{z1}\,\underline{z}_o = P_2\,\underline{h}_{t1}\,e^{-j\beta_{z1}\,z} + P_2\,h_{z1}\,e^{-j\beta_{z1}\,z}\,\underline{z}_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{E}_2 = \underline{E}_{t2} + E_{z2}\,\underline{z}_o = P_2'\,\underline{e}_{t2}\,e^{-j\beta_{z2}\,z} + P_2'\,e_{z2}\,e^{-j\beta_{z2}\,z}\,\underline{z}_o \\ \underline{H}_2 = \underline{H}_{t2} + H_{z2}\,\underline{z}_o = P_2'\,\underline{h}_{t2}\,e^{-j\beta_{z2}\,z} + P_2'\,h_{z2}\,e^{-j\beta_{z2}\,z}\,\underline{z}_o \end{cases}$$

Con ciò la quantità (1) diviene:

$$-\int_{S_1}\left[\left(\underline{E}_{t1} + E_{z1}\,\underline{z}_o\right)\times\left(\underline{H}_{t2} + H_{z2}\,\underline{z}_o\right)^* + \left(\underline{E}_{t2} + E_{z2}\,\underline{z}_o\right)\times\left(\underline{H}_{t1} + H_{z1}\,\underline{z}_o\right)^*\right]\cdot\underline{z}_o\,dS +$$

$$+\int_{S_2}\left[\left(\underline{E}_{t1} + E_{z1}\,\underline{z}_o\right)\times\left(\underline{H}_{t2} + H_{z2}\,\underline{z}_o\right)^* + \left(\underline{E}_{t2} + E_{z2}\,\underline{z}_o\right)\times\left(\underline{H}_{t1} + H_{z1}\,\underline{z}_o\right)^*\right]\cdot\underline{z}_o\,dS$$

Sviluppando i prodotti si vede che le sole componenti che contribuiscono al flusso sono: $\underline{E}_{t1}\times\underline{H}_{t2}^*$ e $\underline{E}_{t2}\times\underline{H}_{t1}^*$, per cui la (1) diviene:

$$-\int_{S_1} P_2 P_2'^*\,e^{+j(\beta_{z_2}-\beta_{z_1})\,z_1}\left(\underline{e}_{t1}\times\underline{h}_{t2}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS - \int_{S_2} P_2^*\,P_2'\,e^{-j(\beta_{z_2}-\beta_{z_1})\,z_1}\left(\underline{e}_{t2}\times\underline{h}_{t1}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS$$

$$+\int_{S_1} P_2 P_2'^*\,e^{+j(\beta_{z_2}-\beta_{z_1})\,z_2}\left(\underline{e}_{t1}\times\underline{h}_{t2}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS$$

$$+\int_{S_2} P_2^*\,P_2'\,e^{-j(\beta_{z_2}-\beta_{z_1})\,z_2}\left(\underline{e}_{t2}\times\underline{h}_{t1}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS \quad (16.11.11)$$

Poiché le componenti trasversali $\underline{e}_{t1}, \underline{h}_{t1}, \underline{e}_{t2}, \underline{h}_{t2}$ non dipendono da z, gli integrali:

$$\int_S \left(\underline{e}_{t1}\times\underline{h}_{t2}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS \;\; e \;\; \int_S \left(\underline{e}_{t2}\times\underline{h}_{t1}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS$$

Assumono sempre gli stessi valori in corrispondenza a qualunque sezione trasversa, in particolare porremo:

$$\int_S \left(\underline{e}_{t1}\times\underline{h}_{t2}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS = I_{12}, \qquad \int_S \left(\underline{e}_{t2}\times\underline{h}_{t1}^*\right)\cdot\underline{z}_o\,dS = I_{21}$$

Indicando poi genericamente:

$$\varphi_1 = \left(\beta_{z_2} - \beta_{z_1}\right) z_1, \qquad \varphi_2 = \left(\beta_{z_2} - \beta_{z_1}\right) z_2$$

La (1') può ancora riscriversi:

$$-I_{12}P_2P_2'^{*}e^{+j\varphi_1} - I_{21}\left(P_2P_2'^{*}\right)^{*}e^{-j\varphi_1} + I_{12}P_2P_2'^{*}e^{+j\varphi_2} + I_{21}\left(P_2P_2'^{*}\right)^{*}e^{-j\varphi_2} =$$

$$= I_{12}\left[P_2P_2'^{*}\left(e^{j\varphi_2} - e^{j\varphi_1}\right)\right] + I_{21}\left[\left(P_2P_2'^{*}\right)^{*}\left(e^{-j\varphi_2} - e^{-j\varphi_1}\right)\right], \qquad (16.11.12)$$

Si può osservare che i due termini entro parentesi quadre sono quantità complesse coniugate, per cui indicando genericamente con ρ e ϑ rispettivamente modulo e fase di $P_2P_2'^{*}\left(e^{j\varphi_2} - e^{j\varphi_1}\right)$, la (1") assume la forma:

$$= I_{12}\,\rho\,e^{j\vartheta} + I_{21}\,\rho\,e^{-j\vartheta}, \qquad (16.11.13)$$

In base a quanto affermato precedentemente, quest'ultima espressione deve risultare immaginaria o nulla (che equivale a dire che la sua parte reale è sempre zero).

Ricordiamo che le soluzioni trasverse dei modi presi in esame $\left(\underline{e}_{t1}, \underline{e}_{t2}, \underline{h}_{t1}, \underline{h}_{t2}\right)$ sono determinate a meno di una costante moltiplicativa (soddisfacendo anch'esse all'equazione di *Helmholtz* omogenea $\nabla_t^2[\cdot] = K_t^2[\cdot]$, con K_t^2 reale nel nostro caso ideale); perciò, in maniera del tutto generale, tali componenti trasverse possono considerarsi reali. Questo implica fra l'altro che gli integrali indicati con I_{12} e I_{21} sono pure reali.

Cosicché, affinché la (16.11.13) sia una quantità immaginaria o nulla deve risultare:

$$\mathrm{Re}\left\{I_{12}\,\rho\,e^{j\vartheta} + I_{21}\,\rho\,e^{-j\vartheta}\right\} = 0 \implies \mathrm{Re}\{I_{12}\,\rho\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) + I_{21}\,\rho\,(\cos\vartheta - j\sin\vartheta)\}$$
$$= (I_{12} + I_{21})\,\rho\cos\vartheta = 0$$

Dovendo questa relazione essere soddisfatta per qualsiasi valore di $z_1, z_2, \beta_{z_1}, \beta_{z_2}$ (con $\beta_{z_1} \neq \beta_{z_2}$), P_2, P_2' deve essere:

$$I_{12} = -I_{21}$$

o, in modo più esplicito:

$$\int_S \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = -\int_S \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS\,, \qquad (16.11.20)$$

Questa condizione cui si è giunti, considerando due modi con differenti velocità di fase, propagantesi nello stesso verso (da noi fissato secondo $+\underline{z}_o$).

Si può vedere che alle stesse conclusioni si sarebbe giunti prendendo in esame due modi entrambi propagantesi lungo $-\underline{z}_o$.

Infatti, esprimendo direttamente le componenti utili, in questo caso è:

$$\begin{cases} \underline{E}_{t1} = P_1\, \underline{e}_{t1}\, e^{j\,\beta_{z_1} z} \\ \underline{H}_{t1} = -P_1\, \underline{h}_{t1}\, e^{j\,\beta_{z_1} z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{E}_{t2} = P_1'\, \underline{e}_{t2}\, e^{j\,\beta_{z_2} z} \\ \underline{H}_{t2} = -P_1'\, \underline{h}_{t2}\, e^{j\,\beta_{z_2} z} \end{cases}$$

Con il medesimo procedimento la (1) diviene:

$$\int_{S_1} P_1 P_1'^{*} e^{+j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_1} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS + \int_{S_2} P_1^{*} P_1' \, e^{-j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_1} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS +$$

$$- \int_{S_1} P_1 P_1'^{*} e^{+j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_2} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS - \int_{S_2} P_1^{*} P_1' \, e^{-j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_2} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^{*}\right) \cdot \underline{z}_o \, dS$$

Con le stesse posizioni già fatte:

$$I_{12} P_1 P_1'^{*} e^{-j\varphi_1} - I_{21} \left(P_1 P_1'^{*}\right)^{*} e^{j\varphi_1} + I_{12} P_1 P_1'^{*} e^{-j\varphi_2} + I_{21} \left(P_1 P_1'^{*}\right)^{*} e^{j\varphi_2} =$$

$$= I_{12} \left[P_1 P_1'^{*} \left(e^{-j\varphi_1} - e^{-j\varphi_2}\right)\right] + I_{21} \left[\left(P_1 P_1'^{*}\right)^{*} \left(e^{j\varphi_1} - e^{j\varphi_2}\right)\right]$$

Quantità che è ancora della forma:

$$I_{12}\, \hat{\rho}\, e^{j\hat{\vartheta}} + I_{21}\, \hat{\rho}\, e^{-j\hat{\vartheta}}$$

La sua parte reale sarà nulla sempre per $I_{12} = -I_{21}$, che è la relazione trovata anche per i modi entrambi propagantesi secondo $+\underline{z}_o$.

Ripetiamo ora il procedimento già svolto, nel caso in cui i due modi si propagano in versi opposti: supporremo ad esempio che il primo si propaghi nel verso di $+\underline{z}_o$, mentre il secondo in quello di $-\underline{z}_o$ (è ovvio che si otterranno le stesse conclusioni con la scelta opposta: il primo lungo $-\underline{z}_o$, il secondo lungo $+\underline{z}_o$).

Riportando i risultati più salienti, le componenti utili nello sviluppo della (16.11.10) sono date da (ipotizzando sempre $\beta_{z_1} \neq \beta_{z_2}$)

$$\begin{cases} \underline{E}_{t1} = P_2\, \underline{e}_{t1}\, e^{-j\,\beta_{z_1} z} \\ \underline{H}_{t1} = -P_2\, \underline{h}_{t1}\, e^{-j\,\beta_{z_1} z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{E}_{t2} = P_1\, \underline{e}_{t2}\, e^{j\,\beta_{z_2} z} \\ \underline{H}_{t2} = -P_1\, \underline{h}_{t2}\, e^{j\,\beta_{z_2} z} \end{cases}$$

Sviluppando in questo caso la (1)

$$\int_{S_1} P_1^{*} P_2 e^{-j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_1} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^{*}\right) dS - \int_{S_2} P_1 P_2^{*} \, e^{j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_1} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^{*}\right) dS +$$

$$- \int_{S_1} P_1^{*} P_2 \, e^{-j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_2} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^{*}\right) dS + \int_{S_2} P_1 P_2^{*} \, e^{j(\beta_{z_1}-\beta_{z_2})\,z_2} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^{*}\right) dS$$

Con le posizioni:

$$\int_S \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = I_{12}, \qquad \int_S \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = I_{21}$$

$$\psi_1 = \left(\beta_{z_1} + \beta_{z_2}\right) z_1, \qquad \psi_2 = \left(\beta_{z_1} + \beta_{z_2}\right) z_2$$

Avremo:

$$I_{12} P_1{}^* P_2 e^{-j\psi_1} - I_{21} (P_1{}^* P_2)^* e^{j\psi_1} - I_{12} P_1{}^* P_2 e^{-j\psi_2} + I_{21} (P_1{}^* P_2)^* e^{j\psi_2} =$$

$$= I_{12}\left[P_1{}^* P_2 \left(e^{-j\psi_1} - e^{-j\psi_2}\right)\right] - I_{21}\left[(P_1{}^* P_2)^* \left(e^{j\psi_1} - e^{j\psi_2}\right)\right]$$

Tale quantità può porsi ancora nella forma:

$$I_{12}\, \bar{\rho}\, e^{j\bar{\vartheta}} - I_{21}\ \bar{\rho}\, e^{-j\bar{\vartheta}}$$

Dovendo sempre risultare immaginaria o nulla; perciò:

$$\mathrm{Re}\left\{I_{12}\, \bar{\rho}\, e^{j\bar{\vartheta}} - I_{21}\ \bar{\rho}\, e^{-j\bar{\vartheta}}\right\} = (I_{12} - I_{21})\, \bar{\rho} \cos\bar{\vartheta} = 0 \Longrightarrow I_{12} = I_{21}$$

O nella forma esplicita:

$$\int_S \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = + \int_S \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS\,, \qquad (16.11.21)$$

Le condizioni (16.11.20) e (16.11.21), relative a modi propagantesi rispettivamente con versi concordi e discordi, devono essere verificate contemporaneamente, riferendoci a campi *e.m.* composti generalmente sia da un'onda diretta, sia da una riflessa. Possiamo quindi concludere che in guida ideale, per due modi averti diverse velocità di fase risulta sempre:

$$\boxed{\int_S \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = \int_S \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = 0}, \qquad (16.11.22)$$

Questo è l'assunto fondamentale cui volevamo giungere. Esso dimostra, secondo quanto già accennato, che i modi sono ortogonali; ovvero la potenza trasportata complessivamente (attraverso una generica S) è la somma delle singole potenze dei modi.

6.12 Modi Degeneri

Consideriamo ora il caso per cui è $\beta_{z_1} = \beta_{z_2}$; i modi aventi la stessa costante di propagazione (e velocità di fase ω/β_z) vengono detti "*degeneri*". Per essi in genere non valgono più le conclusioni precedentemente ricavate ($I_{12} = I_{21} = 0$).

Consideriamo infatti due modi degeneri propagantesi nello stesso verso, ad esempio $+\underline{z}_o$ (le ipotesi saranno valide anche per $-\underline{z}_o$); le componenti utili nei flussi di potenza sono:

$$\begin{cases} \underline{E}_{t1} = P_2\, \underline{e}_{t1}\, e^{-j\,\beta_z\, z} \\ \underline{H}_{t1} = P_2\, \underline{h}_{t1}\, e^{-j\,\beta_z\, z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{E}_{t2} = P_2'\, \underline{e}_{t2}\, e^{-j\,\beta_z\, z} \\ \underline{H}_{t2} = P_2'\, \underline{h}_{t2}\, e^{-j\,\beta_z\, z} \end{cases}$$

Sviluppando la (16.11.10) abbiamo in questo caso una relazione che risulta indipendente da z (deducibile dalla (16.11.11) ponendo $\beta_{z_1} = \beta_{z_2}$ o, con le solite posizioni, dalla (16.11.12) con $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$); pertanto gli integrali estesi a S_1 e S_2 della (1) sono uguali.

La quantità espressa dalla (16.11.20) risulterà quindi sempre nulla, potendo però essere: $I_{12} = -I_{21}$, cioè non necessariamente vera la (16.11.22).

Nel caso di due modi propagantesi in versi opposti con $\beta_{z_1} = \beta_{z_2}$, si ha (1° modo: $+\underline{z}_o$, 2° modo: $-\underline{z}_o$; o viceversa)

$$\begin{cases} \underline{E}_{t1} = P_2\, \underline{e}_{t1}\, e^{-j\,\beta_z\, z} \\ \underline{H}_{t1} = P_2\, \underline{h}_{t1}\, e^{-j\,\beta_z\, z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{E}_{t2} = P_1\, \underline{e}_{t2}\, e^{j\,\beta_z\, z} \\ \underline{H}_{t2} = -P_1\, \underline{h}_{t2}\, e^{j\,\beta_z\, z} \end{cases}$$

In questo caso si vede che sviluppando la (16.11.20) i termini integrali dipendono ancora da z (secondo fattori del tipo $e^{j2\beta_z z}$) e dovrà essere ancora soddisfatta la (16.11.22).

Per le osservazioni fatte (validità della (2') ma non della (2)) tali modi non sono in genere ortogonali, per cui per essi non si può affermare che trasportino potenza separatamente: non è cioè necessariamente nullo il termine (di potenza)

$$\frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^* + \underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o\, dS = 0$$

Questi ragionamenti relativi al caso ideale di propagazione contemporanea di più modi hanno riscontri pratici di notevole interesse, per quanto riguarda le dissipazioni energetiche.

Nel caso di propagazione in guida d'onda reale (con piccole perdite dovute alla conducibilità non infinita del mantello metallico) è stata precedentemente calcolata l'espressione dell'attenuazione per un certo modo (tramite il metodo di perturbazione).

Qualora i termini di potenza misti:

$$P_{12} = \int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS, \qquad P_{21} = \int_S \left(\underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS$$

siano nulli (cosa che avviene sempre nei modi ortogonali nel caso ideale), tale metodo risulta ancora valido; la potenza dissipata globalmente è così data dalla somma delle potenze dissipate dai singoli modi.

Se invece P_{12} e P_{21} non sono nulli, i modi si dicono "*accoppiati*" nelle perdite. L'accoppiamento dei modi è in genere di scarso rilievo ai fini delle dissipazioni, tranne che per quelli degeneri (che comunque non sono affatto sempre accoppiati).

Si può vedere che, con riferimento alle correnti $\underline{J}_1$ e $\underline{J}_2$ che scorrono per i due modi sul mantello conduttore (di impedenza Z_m), non si ha accoppiamento solo se le correnti in ogni punto del contorno risultano tra loro ortogonali.

È interessante evidenziare che per i modi degeneri, per cui $P_{12} \neq 0, P_{21} \neq 0$, è possibile ricavare una loro opportuna combinazione lineare tale che si abbiano due nuovi modi con $P_{12} = 0, P_{21} = 0$ e che risultino inoltre non più accoppiati (cosicché l'attenuazione totale può dedursi dalla somma delle singole)[22].

Nel caso di onde incidenti relative a modi degeneri:

$$P_{12} = \int_S \left(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = P_2 {P'_2}^* e^{-j(\beta_{z_1} - \beta_{z_2}) z} \int_S \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t2}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = 0$$

$$P_{21} = \int_S \left(\underline{E}_2 \times \underline{H}_1^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = {P'_2}^* P_2 e^{j(\beta_{z_1} - \beta_{z_2}) z} \int_S \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t1}^*\right) \cdot \underline{z}_o \, dS = 0$$

[22] Una trattazione ben più esauriente può essere trovata in Collin, op. cit. § 3.9, 3.10.

7 GUIDE D'ONDA

Sono state analizzate fin qui le principali proprietà dei campi *e.m.* propagantesi in strutture guidanti a sezione generica formata da un solo conduttore.

Vogliamo ora studiare dettagliatamente i particolari modi ***TE*** e ***TM*** all'interno delle guide d'onda più comunemente utilizzate in pratica (come si sa non possono esistere i ***TEM***).

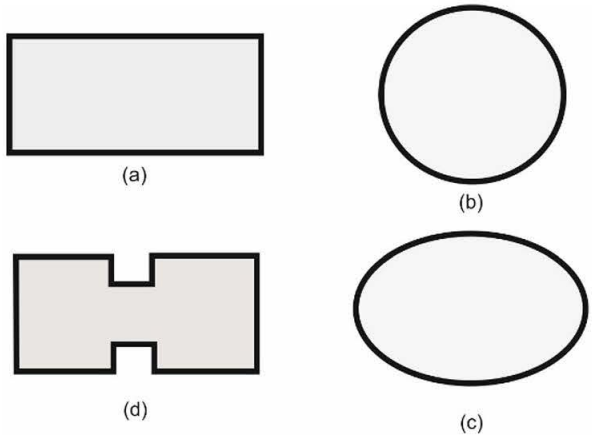


Figura 7.1 – Strutture guidanti comunemente utilizzate

In fig.7.1 sono schematizzate le sezioni trasversali delle più note di esse rettangolare, circolare, ellittica, con scanalature (*Ridge-guide*), etc.

Per lo studio che segue riterremo chiaramente valido il complesso delle proprietà, espressioni delle equazioni precedentemente trovate, vedendo la particolarizzazione di molte di queste.

L'opportuno sistema di coordinate cilindriche generalizzate cui riferirsi sarà suggerito dalla tipica forma della sezione della guida d'onda.

7.1 GUIDA D'ONDA RETTANGOLARE

È conveniente in questo caso riferirsi a un sistema di coordinate cartesiane ortonormale destro ($q_1 = x, q_2 = y, z = z$). Esamineremo separatamente le onde ***TE*** e quelle ***TM***.

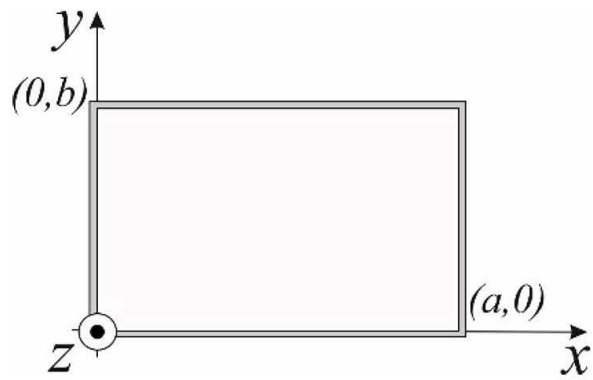


Figura 7.2 - Guida rettangolare su riferimento cartesiano

7.1.1 Onde TE

Le componenti trasverse del campo *e.m.* ***TE*** possono essere dedotte, come al solito, dalla risoluzione dell'equazione differenziale scalare (*Helmholtz*):

$$\nabla_t^2 h_z = K_t^2 h_z \qquad (7.1)$$

Ricordiamo che il campo ***TE*** può scomposto come:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t \\ \underline{H} = \underline{H}_t + H_z\, \underline{z}_o \end{cases}$$

Poiché ci riferiremo a guide ideali, h_z deve soddisfare la:

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0, \qquad \text{sul contorno } s \text{ (PEI)}$$

Proprietà derivante dall'aver considerato $g = \infty$ (***PEI***).

Ricordando l'espressione generale del *Laplaciano* in coordinate cilindriche (cfr. ad es. *Barzilai*, op. cit. pag. 37):

$$\nabla^2[\cdot] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}[\cdot]\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}[\cdot]\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}[\cdot]\right)\right] \qquad (7.2)$$

L'equazione di *Helmholtz* diviene nel nostro caso ($q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z;\ h_1 = h_2 = h_3 = 1$):

$$\frac{\partial^2 h_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z(x,y)}{\partial y^2} = K_t^2 h_z(x,y) \qquad (7.3)$$

Indicate con a e b le dimensioni della sezione della guida (riferite alle pareti interne), la condizione al contorno diviene, con riferimento alla fig. 7.2.

$$\text{per } \begin{cases} x = 0, x = a \\ 0 \le y \le b \end{cases} \qquad \frac{\partial h_z(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\text{per } \begin{cases} 0 \le x \le a \\ y = 0, y = b \end{cases} \qquad \frac{\partial h_z(x,y)}{\partial y} = 0$$

si può tentare di risolvere l'equazione delle onde col metodo di separazione delle variabili, esprimendo la $h_z(x,y)$ come prodotto di due funzioni $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, rispettivamente dipendenti dalla sola x e dalla sola y:

$$h_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y), \qquad \text{separazione delle variabili}$$

Si può dimostrare che in tale caso le soluzioni ottenibili con questo metodo forniscono uno spettro completo. Tale scelta non è quindi limitativa, in quanto un'opportuna combinazione lineare (eventualmente estesa a infiniti termini) di esse è in grado di rappresentare ogni soluzione dell'equazione di *Helmholtz*.

Generalmente può pensarsi di applicare con successo la separazione delle variabili qualora la struttura presenti determinate simmetrie, tali da permettere la corrispondente scomposizione delle condizioni al contorno.

In questa maniera si ottiene:

$$\mathcal{Y}(y)\frac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}+\mathcal{X}(x)\frac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}=K_t^2\mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y) \qquad (7.4)$$

Con le condizioni

$$\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx}=0, \qquad per\ x=0, x=a, 0\le y\le b$$
$$\frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy}=0, \qquad per\ y=0, y=b, 0\le x\le a$$

Poiché la soluzione $h_z(x,y)=0$ è priva di interesse (in quanto implica un campo *e.m.* identicamente nullo) posiamo dividere per $\mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y)$ ambo i membri dell'equazione delle onde e semplificare le corrispondenti condizioni al contorno, supponendo $\mathcal{X}(x)\neq 0, \mathcal{Y}(y)\neq 0$. Si ha così:

$$\frac{1}{\mathcal{X}(x)}\frac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}+\frac{1}{\mathcal{Y}(y)}\frac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}=K_t^2 \qquad (7.5)$$

con:

$$\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx}=0, \qquad per\ x=0, x=a;\ \frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy}=0, \qquad per\ y=0, y=b$$

posta nella forma precedente, l'equazione di *Helmholtz* esprime l'uguaglianza fra la somma dei due termini:

$$\frac{1}{\mathcal{X}(x)}\frac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}, \qquad \frac{1}{\mathcal{Y}(y)}\frac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}$$

Funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, e la costante reale K_t^2. Affinché ciò sia verificato per ogni $x, y \in S$ è necessario che i due addendi siano (separatamente) costanti:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mathcal{X}(x)}\dfrac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}=-K_x^2\\ \dfrac{1}{\mathcal{Y}(y)}\dfrac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}=-K_y^2\end{cases}$$

Dove K_x^2 e K_y^2, che sono quantità reali non negative, devono soddisfare la *relazione di separabilità*:

$$-K_x^2-K_y^2=K_t^2$$

Le equazioni ottenute (*equazioni dei modi armonici*):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2} + K_x^2\mathcal{X}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2} + K_y^2\mathcal{Y}(y) = 0 \end{cases}$$

sono omogenee (del secondo ordine, lineari).

I loro integrali sono notoriamente del tipo (∞^2 soluzioni)

$$\begin{cases} \mathcal{X}(x) = C_1\sin(K_x x) + C_2\cos(K_x x), & per\ K_x \neq 0 \\ \mathcal{Y}(y) = D_1\sin(K_y y) + D_2\cos(K_y y), & per\ K_y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{X}(x) = C_1 x + C_2, & per\ K_x = 0 \\ \mathcal{Y}(y) = D_1 x + D_2, & per\ K_y = 0 \end{cases}$$

Un'equazione differenziale lineare omogenea, del tipo di quelle in esame $\ddot{f} + \nu^2 f = 0$, soddisfacente a determinare condizioni al contorno pure omogenee, ammette per qualunque ν la soluzione banale $f = 0$. Per un tale *problema ai limiti omogeneo* possono aversi soluzioni non identicamente nulle (autosoluzioni) solo in corrispondenza a particolari valori del parametro ν (autovalori), determinati dalle condizioni al contorno[23].

Imponiamo quindi le condizioni al contorno, supponendo dapprima che $K_x \neq 0$ si ottiene per la $\mathcal{X}(x)$:

$$\boxed{\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx} = K_x[C_1\cos(K_x x) - C_2\sin(K_x x)]} \qquad (7.6)$$

Da cui segue che:

$$\left.\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx}\right|_{x=0} = K_x C_1 = 0$$

Ottenendo la condizione:

$$C_1 = 0, \qquad \text{dato che abbiamo imposto } K_x \neq 0$$

E ancora, in virtù del risultato ricavato:

$$\left.\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx}\right|_{x=a} = -K_x C_2\sin(K_x a) = 0$$

[23] Utili considerazioni su questo argomento possono essere trovate ad es. in Ghizzetti, Rosati, "*Complementi ed Esercizi di Analisi Matematica*", vol. II, ed. Veschi: §28.86 (e 28.88)

E dovendo essere $C_2 \neq 0$, (altrimenti si avrebbe $\mathcal{X}(x) = 0$), la precedente espressione risulta verificata solo se:

$$\sin(K_x a) = 0 \implies K_x a = m\pi \Longrightarrow K_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{con } m = 1,2,\dots$$

Quindi:

$$\mathcal{X}(x) = C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right), \qquad m = 1,2,\dots \tag{7.7}$$

(avendo scelto per K_x la determinazione positiva di $\sqrt{K_x^2}$). Se $K_x = 0$ abbiamo:

$$\mathcal{X}(x) = C_1 x + C_2, \qquad per\ K_x = 0$$

$$\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx} = C_1$$

Per cui le:

$$\left.\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx}\right|_{x=0, x=a} = 0$$

Richiedono ancora che $C_1 = 0$.

Analogo provvedimento può ripetersi per le condizioni al contorno della:

$$\begin{cases} \mathcal{Y}(y) = D_1 \sin(K_y y) + D_2 \cos(K_y y), & per\ K_y \neq 0 \\ \mathcal{Y}(y) = D_1 x + D_2, & per\ K_y = 0 \end{cases}$$

Dalle quali

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{Y}(y)}{dy} = K_y\left[D_1 \cos(K_y y) - D_2 \sin(K_y y)\right], & \text{per } K_y \neq 0 \\ \dfrac{d\mathcal{Y}(y)}{dy} = D_1, & \text{per } K_y = 0 \end{cases}$$

Per cui:

$$\left.\frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy}\right|_{y=0} = K_y D_1 = 0 \implies D_1 = 0$$

Ed ancora dovendo essere $D_2 \neq 0$:

$$\left.\frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy}\right|_{y=b} = -K_y D_2 \sin(K_y b) = 0 \implies K_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad con\ n = 1,2,\dots$$

(avendo scelto per K_y la determinazione positiva di $\sqrt{K_y^2}$).

Come detto, per $K_y = 0$

$$\frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy} = D_1 \implies \left.\frac{d\mathcal{Y}(y)}{dy}\right|_{y=0,y=b} = 0, \qquad \text{da cui si deduce che } D_1 = 0$$

In definitiva le condizioni al contorno per i campi ***TE*** implicano le:

$$D_1 = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad K_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{con } m = 0,1,2,\dots, \qquad K_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad con\ n = 0,1,2,\dots$$

(dove sono stati considerati anche i valori nulli degli indici "m" ed "n", compattando così i casi $K_x \neq 0, K_x = 0, K_y \neq 0, K_y = 0$.)

Pertanto, gli autovalori dei modi ***TE*** sono determinati dalla:

$$K_t^2 = -K_x^2 - K_y^2 = -\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right], \qquad con \begin{cases} m = 0,1,2,\dots \\ n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

(i due indici non possono essere mai nulle contemporaneamente in quanto la relativa soluzione sarebbe priva di interesse)

E l'espressione della componente $h_z(x,y)$ (autofunzione):

$$h_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y) = C_2 D_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad con \begin{cases} m = 0,1,2,\dots \\ n = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{7.8}$$

Poiché K_t^2 dipende dai due indici reali interi "m" ed "n", potrà assumere un'infinità numerabile di valori [24]; ordinati i K_t^2 in ordine crescente (in modulo) può verificarsi il lemma di *Rellich* (cfr. pag. 52).

Il K_t^2 risulta effettivamente reale negativo: infatti il caso di indici "m" ed "n" contemporaneamente nulli, che da luogo all'autofunzione costante $h_z = C_2 D_2$, può essere escluso in quanto priva di interesse (cfr. pag. 54).

Per ogni coppia di indici "m" ed "n" rimangono quindi individuati ${K_t^2}_{[m,n]}$ e di conseguenza il corrispondente campo TE; che indicheremo come: $TE_{[m,n]}$.

La costante moltiplicativa $C_2 D_2$, che compare nell'espressione $h_z(x,y)$, deriva dalla risoluzione di un problema omogeneo; essa, influendo solo sull'ampiezza delle componenti del campo *e.m.*, risulta determinata dalle condizioni iniziali di eccitazione (per es. potenza immessa, etc.).

---

[24] Cfr. Ghizzetti-Mazzarella-Ossicini: op. cit., §3.1)

Siamo ora in grado di ricavare le componenti trasverse del campo $\mathrm{TE}_{[m,n]}$ generico, tramite le nostre formule (§4,4): nel sistema di riferimento cartesiano, ricordando che:

$$\nabla_t[\cdot] = \underline{x}_o \frac{\partial}{\partial x}[\cdot] + \underline{y}_o \frac{\partial}{\partial y}[\cdot]$$

Si ha per $\underline{h}_t(x,y)$:

$$\underline{h}_t(x,y) = h_x\,\underline{x}_o + h_y\,\underline{y}_o = \frac{K_z}{K_t^2}\,\nabla_t h_z = \frac{K_z}{K_t^2}\left(\underline{x}_o \frac{\partial h_z}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial h_z}{\partial y}\right) =$$

$$= -\left[-\frac{K_z}{K_t^2} C_2 D_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]\underline{x}_o + \left[-\frac{K_z}{K_t^2} C_2 D_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]\underline{y}_o$$

Per $\underline{e}_t(x,y)$ si può scrivere:

$$\underline{e}_t(x,y) = e_x\,\underline{x}_o + e_y\,\underline{y}_o = \frac{j\omega\mu}{K_z}\;\underline{h}_t \times \underline{z}_o = \frac{j\omega\mu}{K_z} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ h_x & h_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{j\omega\mu}{K_z} h_y\right)\underline{x}_o + \left(-\frac{j\omega\mu}{K_z} h_x\right)\underline{y}_o \qquad (7.9)$$

Riassumendo, in una guida d'onda con pareti perfettamente conduttrici a sezione rettangolare di dimensioni a, b, le componenti per un'onda ***TE*** sono:

$$\begin{cases} e_x(x,y) = -C_2 D_2 \dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\dfrac{n\pi}{b}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ e_y(x,y) = C_2 D_2 \dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\dfrac{m\pi}{a}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ e_z(x,y) = 0 \\ h_x(x,y) = -C_2 D_2 \dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{m\pi}{a}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ h_y(x,y) = -C_2 D_2 \dfrac{j\omega\mu}{K_t^2}\dfrac{m\pi}{b}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ h_z(x,y) = C_2 D_2 \cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \end{cases} \qquad (7.10)$$

Le componenti trasversali scritte, insieme a quelle longitudinali, che sono sempre del tipo:

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \end{cases}$$

Permettono la completa conoscenza del campo ***TE***

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t = \underline{e}_t Z_e = [e_x(x,y)Z_e(z)]\underline{x}_o + [e_y(x,y)Z_e(z)]\underline{y}_o \\ \underline{H} = \underline{H}_t + H_z\underline{z}_o = \underline{h}_t Z_h + h_z Z_e \underline{z}_o = [h_x(x,y)Z_h(z)]\underline{x}_o + [h_y(x,y)Z_h(z)]\underline{y}_o + [h_z(x,y)Z_e(z)]\underline{z}_o \end{cases}$$

La costante di propagazione K_z risulta determinata per ogni modo dalla relazione:

$$\boxed{K_z = \sqrt{K^2 - K_t^2} = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \qquad (7.11)$$

Considerando il dielettrico non dissipativo (come generalmente avviene in pratica) è possibile individuare la frequenza di taglio di un modo $\mathrm{TE}_{[m,n]}$ tramite la relazione di separabilità (Cap 4):

$$\omega_c^2\mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = -K_t^2 \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}$$

Si ha infatti (indicando con "c" la velocità della luce nel mezzo):

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \Rightarrow \lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} \qquad (7.12)$$

Si può osservare che la frequenza di cutoff di ogni modo dipende esclusivamente dalla struttura (secondo ε e μ delmezzo e le dimensioni a e b della sezione).

Poiché per convenzione si suppone che il lato di dimensione a (per convenzione sempre sull'asse x) sia maggiore di quello di dimensione b (giacente su y), il minimo valore che la f_c può assumere al variare degli indici m, n si ottiene per $m = 1,\ n = 0$ (ricordiamo che non può essere contemporaneamente $n = 0,\ m = 0$)

$$f_{c[1,0]} = \frac{c}{2a} \implies \lambda_{c[1,0]} = 2a$$

(è usuale rappresentare tra parentesi quadre gli indici relativi alle grandezze dei campi TE, tra parentesi tonde quelli delle onde ***TM***, secondo la notazione di *Šelkunov*).

Vedremo successivamente che tra tutti i modi (***TE*** e ***TM***) che possono propagarsi in una guida d'onda rettangolare, il $\mathrm{TE}_{[1,0]}$ è quello avente la minore frequenza di taglio, cioè è il "*modo dominante*" (per la sua notevole importanza esso verrà esaminato singolarmente).

Qualora si fosse considerato il lato "a" (sull'asse x) e quello "b" (sull'asse y), la f_c minima sarebbe stata ottenuta per m=0 e n=1 ($f_{c[0,1]} = \frac{c}{2b} \implies \lambda_{c[0,1]} = 2b$) ed il modo dominante sarebbe divenuto ovviamente il $TE_{[0,1]}$.

Si può dimostrare che in una guida d'onda dalla generica sezione, il modo dominante risulta essere sempre un ***TE***. Questa proprietà è da mettere in relazione alle diverse condizioni al contorno cui devono soddisfare le autofunzioni dell'Equazione di *Helmholtz* per i modi ***TE*** e ***TM***.

7.1.2 Onde TM

Il procedimento che consente di esplicitare l'intero campo ***TM*** in una guida rettangolare è analogo a quello seguito per le onde ***TE***.

In questo caso, come sappiamo, può ancora essere ricavato il campo *e.m.* trasverso, risolvendo l'equazione di *Helmholtz*:

$$\nabla_t^2 e_z = K_t^2 e_z$$

Dove, sempre riferendoci al caso di guida con pareti perfettamente conduttrici, deve essere verificata la condizione:

$$e_z = 0 \qquad sul\ contorno\ s$$

La risoluzione generale dell'equazione di *Helmholtz* per i modi ***TM*** ha la stessa espressione di quella per i modi ***TE***.

Nel sistema di riferimento adottato (vedi fig. 7.1) possiamo scrivere (con passaggi noti dall'equazione (7.3)):

$$\frac{\partial^2 e_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z(x,y)}{\partial y^2} = K_t^2 e_z(x,y) \qquad (7.13)$$

Separando le variabili ponendo

$$e_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y)$$

Si ottiene l'analoga della (7.4)

$$\mathcal{Y}(y)\frac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2} + \mathcal{X}(x)\frac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2} = K_t^2\,\mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y) \qquad (7.14)$$

Dividendo entrambi i lati per $\mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y) \neq 0$ su $\dot{S}$, escludendo come al solito l'autofunzione nulla ($e_z(x,y) = 0 \implies$ *e.m.*=0), otteniamo (analogamente alla (7.5)):

$$\frac{1}{\mathcal{X}(x)}\frac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}+\frac{1}{\mathcal{Y}(y)}\frac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}=K_t^2 \qquad (7.15)$$

In cui è ancora:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mathcal{X}(x)}\dfrac{d^2\mathcal{X}(x)}{dx^2}=-K_x^2\\ \dfrac{1}{\mathcal{Y}(y)}\dfrac{d^2\mathcal{Y}(y)}{dy^2}=-K_y^2\end{cases} \quad con\ -K_x^2-K_y^2=K_t^2$$

La condizione $e_z(x,y)=\mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y)=0$ su s implica ovviamente che sia

$$\begin{cases}\mathcal{X}(x)=0, & per\ x=0,x=a; \quad 0\le y\le b\\ \mathcal{Y}(y)=0, & per\ y=0,y=b; \quad 0\le x\le a\end{cases}$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali (dei moti armonici) per $\mathcal{X}(x)$ e $\mathcal{Y}(y)$ sono del tipo

$$\begin{cases}\mathcal{X}(x)=C_1\sin(K_x x)+C_2\cos(K_x x), & per\ K_x\neq 0\\ \mathcal{Y}(y)=D_1\sin(K_y y)+D_2\cos(K_y y), & per\ K_y\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathcal{X}(x)=C_1 x+C_2, & per\ K_x=0\\ \mathcal{Y}(y)=D_1 x+D_2, & per\ K_y=0\end{cases}$$

Imponiamo ora le condizioni ai limiti alla $\mathcal{X}(x)$, con $K_x\neq 0$, si ottiene:

$$\begin{cases}\mathcal{X}(0)=C_2=0 \implies C_2=0\\ \mathcal{X}(a)=C_1\sin(K_x a)=0\end{cases}$$

Per cui, dovendo essere $C_1\neq 0$, che porterebbe a dedurre che $\mathcal{X}(x)\equiv 0$ ovunque, abbiamo

$$C_1\sin(K_x a)=0 \implies K_x a=m\pi \implies K_x=\frac{m\pi}{a}, \qquad m=1,2,\dots$$

Scelta, come solito, la determinazione positiva di $\sqrt{K_x^2}$

Se fosse $K_x=0$ avremmo

$$\begin{cases}\mathcal{X}(0)=C_2=0 \implies C_2=0\\ \mathcal{X}(a)=C_1 a=0 \implies C_1=0\end{cases}$$

Tali condizioni, fornendo la $\mathcal{X}(x)\equiv 0$, comportano l'annullamento di $e_z(x,y)$, quindi supporremo che $K_x\neq 0$.

Analogamente, per la funzione $\mathcal{Y}(y)$, se $K_y\neq 0$:

$$\begin{cases} \mathcal{Y}(0) = D_2 = 0 \implies D_2 = 0 \\ \mathcal{Y}(b) = D_1 \sin(K_y b) = 0 \end{cases}$$

Con $D_1 \neq 0$, scelta la determinazione positiva di $\sqrt{K_y^2}$ segue:

$$\sin(K_y b) = 0 \quad \implies K_y b = n\pi \quad \implies K_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1,2,\dots$$

Se $K_y = 0$

$$\begin{cases} \mathcal{Y}(0) = D_2 = 0 \implies D_2 = 0 \\ \mathcal{Y}(b) = D_1 b = 0 \implies D_1 = 0 \end{cases}$$

Per le considerazioni svolte supporremo anche $K_y \neq 0$

Per quanto visto, gli autovalori per i modi ***TM*** sono dati da

$$K_t^2 = -K_x^2 - K_y^2 = -\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \quad con \begin{cases} m = 1,2,\dots \\ n = 1,2,\dots \end{cases} \qquad (7.16)$$

E l'autofunzione $e_z(x,y)$ assume in definitiva la forma:

$$e_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\,\mathcal{Y}(y) = C_1 D_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\right) \qquad con \begin{cases} m = 1,2,\dots \\ n = 1,2,\dots \end{cases} \qquad (7.17)$$

Si può vedere che l'espressione che fornisce gli autovalori per i modi ***TE*** e quelli ***TM*** è la stessa, va però notato che per le onde ***TM*** gli indici "n" e "m" non possono mai assumere un valore nullo.

Al variare degli indici "n" e "m" si ottiene pertanto l'insieme dei modi $\mathrm{TM}_{(m,n)}$, in corrispondenza agli autovalori $K_{t\,(m,n)}^2$ e alle autofunzioni $e_z(x,y)_{(m,n)}$ la costante moltiplicativa $C_1 D_1$ presente nella $e_z(x,y)$ è determinata dalle condizioni iniziali di eccitazione.

Con i noti passaggi possiamo ricavare le componenti del generico campo $\mathrm{TM}_{(m,n)}$ (cfr §6.5) si ha:

$$\underline{e}_t(x,y) = e_x\,\underline{x}_0 + e_y\,\underline{y}_0 = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t e_z = \frac{K_z}{K_t^2}\left(\underline{x}_0\frac{\partial e_z}{\partial x} + \underline{y}_0\frac{\partial e_z}{\partial y}\right) =$$

$$= \left[\frac{K_z}{K_t^2}\,C_1 D_1\,\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\underline{x}_0 + \left[\frac{K_z}{K_t^2}\,C_1 D_1\,\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\underline{x}_0$$

$$\underline{h}_t(x,y) = h_x\,\underline{x}_0 + h_y\,\underline{y}_0 = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_0 \times \underline{e}_t = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\begin{bmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e_x & e_y & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}e_y\right)\underline{x}_0 + \left(\frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}e_x\right)\underline{y}_0$$

Sinteticamente per i modi ***TM*** possiamo scrivere:

$$\begin{cases} e_x(x,y) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\, C_1 D_1 \dfrac{m\pi}{a} \cos\left(\dfrac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\dfrac{n\pi}{b}\right) \\ e_y(x,y) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\, C_1 D_1 \dfrac{n\pi}{b} \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\dfrac{n\pi}{b}\right) \\ e_z(x,y) = C_1 D_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\dfrac{n\pi}{b}\right) \\ h_x(x,y) = -\dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2}\, C_1 D_1 \dfrac{n\pi}{b} \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\dfrac{n\pi}{b}\right) \\ h_y(x,y) = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_t^2} C_1 D_1 \dfrac{n\pi}{b} \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\dfrac{n\pi}{b}\right) \\ h_z(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (7.18)$$

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t + E_z \underline{z}_0 = Z_e(z)\, \underline{e}_t + e_z Z_h\, \underline{z}_o = [e_x(x,y)\, Z_e(z)]\, \underline{x}_o + \left[e_y(x,y)\, Z_e(z)\right] \underline{x}_o + [e_z(x,y)\, Z_h(z)]\, \underline{z}_o \\ \underline{H} = \underline{H}_t = \underline{h}_t Z_h = [h_x(x,y)\, Z_h(z)] \underline{x}_o + \left[h_y(x,y)\, Z_h(z)\right] \underline{y}_o \end{cases}$$

La costante di propagazione K_z è data dalla (7.11):

$$K_z = \sqrt{K^2 - K_t^2} = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon_c + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Per dielettrici non dissipativi si può ricavare la frequenza di taglio di un modo $\mathrm{TM}_{(m,n)}$:

$$\omega_c^2 \mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = -K_t^2 \implies \omega_c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \implies$$

$$\implies f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \implies \lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Dall'espressione della f_c può osservarsi che il moto ***TM*** avente la frequenza di taglio più bassa è quella corrispondente ad $m = 1$, $n = 1$ (essendo sempre $m \neq 0$, $n \neq 0$), quindi:

$$\boxed{f_{c(1,1)} = \frac{c}{2ab}\sqrt{a^2 + b^2} \implies \lambda_{c(1,1)} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \qquad (7.19)$$

7.1.3 Modo dominante. Modi degeneri

Considerata una guida d'onda a sezione rettangolare di dimensioni a, b $(a > b)$, esaminiamo l'insieme dei valori della frequenza di cutoff (al variare degli indici "m" e "n") per i modi ***TE*** e ***TM*** che in essa possono propagarsi.

Per quanto detto il modo dominante risulta essere il $\mathrm{TE}_{(1,0)}$, cui corrisponde la $f_{c_{(1,0)}} = \frac{c}{2a}$ ed il $K_t^2 = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$

Particolarizzando le espressioni (7.10) trovate per i campi ***TE***, le componenti del modo dominante divengono:

$$\begin{cases} e_x(x,y) = 0 \\ e_y(x,y) = -C_2 D_2 \dfrac{j\omega\mu\, a}{\pi} \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ e_z(x,y) = 0 \\ h_x(x,y) = C_2 D_2 \dfrac{j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\, a^2 - \pi^2}}{\pi} \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ h_y(x,y) = 0 \\ h_z(x,y) = C_2 D_2 \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \end{cases} \tag{7.20}$$

Si osservi che la dimensione b con $b < a$ non influenza la configurazione del campo relativo al modo $\mathrm{TE}_{(1,0)}$, ma questo è vero per tutti i modi $\mathrm{TE}_{(m,0)}$

$$f_{c[1,0]} = \frac{c}{2a} \implies \lambda_{c[1,0]} = 2a$$

Si osservi dalla (7.20) che il campo elettrico del $\mathrm{TE}_{(1,0)}$, avendo la sola componente $e_y(x,y)$ non nulla, risulta polarizzato lungo la direzione $\underline{y_o}$; la legge di variazione con le coordinate nel piano trasverso del modo dominante dipende soltanto da x:

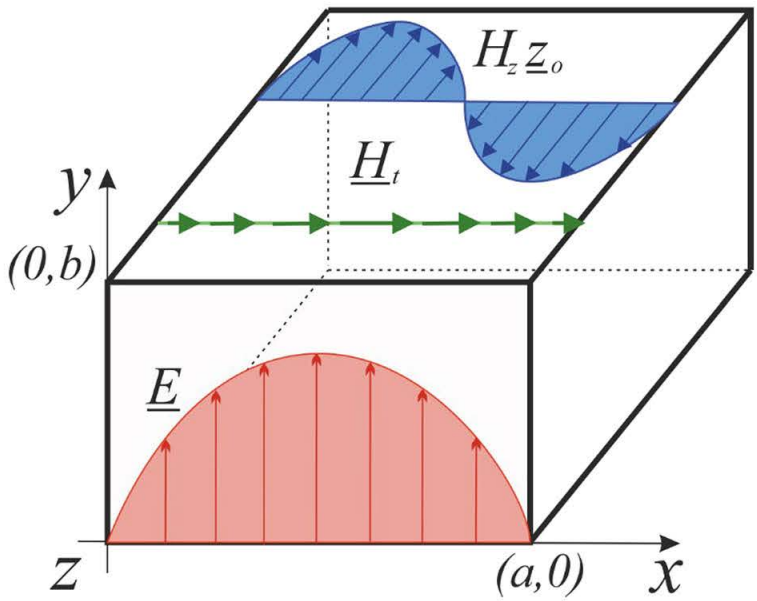


Figura 7.3 – rappresentazione del campo $TE_{[1,0]}$ e.m in guida

l'andamento con x delle componenti non nulle del $TE_{[1,0]}$ è facilmente ottenibile ed è rappresentato qualitativamente in figura.

Come si è già avuto modo di accennare, nella trasmissione in guida d'onda si cerca di far propagare un solo modo. In primo luogo ciò è dovuto al fatto che più modi eccitati contemporaneamente in genere trasportano l'energia associata a un segnale con velocità diverse: infatti in corrispondenza a due valori differenti di K_t^2 si hanno dei modi che hanno diverse costanti di propagazione K_z (e β_z), frequenze di taglio f_c (quindi ω_c, λ_c) e velocità di fase u_z e di gruppo (o d'energia) $u_g = u_w$.

Si ha cioè

$$u_g(m,n) = \frac{c^2}{u_z(m,n)} = \frac{c^2\,\beta_z(m,n)}{\omega}$$

Pertanto, all'uscita della guida avremmo una conversione tra i modi con conseguente distorsione del segnale originario.

Risulta perciò particolarmente semplice e logico, nella maggior parte dei casi (con le eccezioni che vedremo in futuro), lavorare in una banda di frequenze in cui si possa propagare un solo modo (il dominante) laddove tutti gli altri si attenuano più o meno rapidamente trovandosi al di sotto della loro frequenza di taglio.

Ciò è quello che si fa in particolare per le guide d'onda rettangolari; pertanto per esse va conosciuto lo spettro delle f_c al fine di determinare il "*range unimodale*" (banda di frequenze tra il dominante e il primo modo d'ordine superiore, avente cioè la f_c minore dopo quella fondamentale).

Riferendoci a una guida rettangolare utilizzata in pratica, dalle dimensioni standard $a = 0{,}9\ pollici = 22{,}86\ mm; b = 0{,}4\ pollici = 10{,}16\ mm$, ricaviamo indicativamente per modi lo spettro delle frequenze di cutoff.

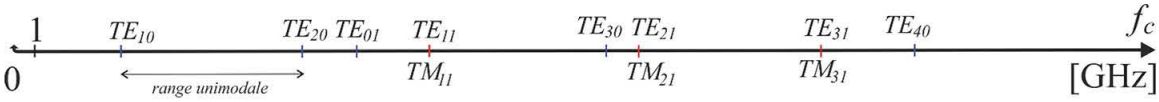


Figura 7.4 – frequenze di cutoff della guida rettangolare

Andando a calcolare al variare di m e n gli effetti valori di

$$K_t^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \qquad f_c = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}; \quad \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{7.21}$$

Otteniamo i dati riassunti nella Tab. 7.1 (dove per $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ si è considerata con buona approssimazione aria secca, la velocità della luce ne vuoto $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$)

a=22,86 mm, b=10,16 mm				
Ordine	Modi	f_c(GHz)	λ_c (cm)	K_t^2(cm^{-2})
1	$TE_{1,0}$	6,557	4,572	1,89
2	$TE_{2,0}$	13,114	2,286	7,56
3	$TE_{0,1}$	14,754	2,032	9,56
4	$TE.TM_{0,1}$	16,145	1,857	11,45
5	$TE_{3,0}$	19,671	1,524	17,01
6	$TE.TM_{2,1}$	19,739	1,519	17,12
7	$TE.TM_{3,1}$	24,589	1,219	26,57
8	$TE_{4,0}$	26,229	1,143	30,24
9	$TE_{0,2}$	29,507	1,016	38,24
10	$TE.TM_{4,1}$	30,093	0,996	39,80
11	$TE.TM_{1,2}$	30,227	0,992	40,13

Tabella 7.1 – Valori caratteristici della guida rettangolare alle frequenze di cutoff

Osservare che i modi ***TE*** e ***TM*** coincidono nel caso in cui $m, n > 0$ cioè sono degeneri in quanto hanno lo stesso $K_t^2(f_c, \lambda_c, u_g, u_z)$.

Dall'esame delle f_c si potrà notare che, per i valori di "a" e "b" indicati, il range di frequenze unimodale è quello compreso tra la f_c del primo modo d'ordine superiore, il $TE_{2,0}$ (*6,557÷13,114 GHz*), cui corrispondono lunghezze d'onda comprese tra "a" e "$2a$" (*2,286÷4,572 cm*); in genere la guida si comporta come un *filtro passa-alto*, in quanto le onde *e.m.* aventi una lunghezza d'onda superiore al doppio della dimensione trasversale maggiore (cioè per $\lambda > 4{,}572\ cm$) non vi si possono propagare .

In pratica, nelle guide d'onda reali, queste considerazioni vanno opportunamente adeguate, tenendo conto delle attenuazioni di potenza (cosicché ad esempio il range unimodale effettivamente utilizzato risulta quello tra circa 1,2 $f_{c[1,0]}$ e 1,9 $f_{c[1,0]}$.

Si noti inoltre che, considerando "m" e "n" non nulli, per una scelta generica della coppia degli indici $(\overline{m},\overline{n})$, gli autovalori per i corrispondenti modi $TE_{[\overline{m},\overline{n}]}$ e $TM_{[\overline{m},\overline{n}]}$ sono gli stessi; ciò implica, *inter alia*, che tali modi abbiano la stessa costante di propagazione $K_z\left(nonch\grave{e}\ \beta_z, u_g, u_z, u_w\right)$ i modi $TE_{[\overline{m},\overline{n}]}$ e $TM_{[\overline{m},\overline{n}]}$ sono cioè degeneri (cfr § 6,12) in una guida guida d'onda rettangolare.

In base a quanto già detto, l'eccitazione di questi modi porta in genere a sgradevoli conseguenze per la dissipazione energetica (accoppiamento delle perdite). Ciò porta a considerazioni circa il corretto dimensionamento del rapporto a/b in modo che il range unimodale sia contenuto tra un $TE_{[1,0]}$ e un $TE_{[2,0]}$.[25]

Ulteriori casi di modi degeneri si avrebbero considerando guide d'onda in cui la dimensione del lato maggiore "a" risulta un multiplo intero di quella del lato minore "b" ovvero $a = kb$.

Ad esempio se fosse $a = 2b$ $(k = 2)$ si vede dall'espressione di K_t^2 che, oltre ai modi $TE_{[\overline{m},\overline{n}]}$ e $TM_{(\overline{m},\overline{n})}$, si avrebbero altri modi degeneri, quali il $TE_{[2,0]}$ ed il $TE_{[0,1]}$, oppure il $TE_{[4,0]}$ ed il $TE_{[0,2]}$ o il ***TE***.$TM_{4,1}$ o il ***TE***. $TM_{2,2}$, etc..

Di particolare interesse è il caso $a = b$ $(k = 1)$ che è una guida d'onda a sezione quadrata.

25 Un'analisi dell'attenuazione dovuta all'accoppiamento di un $TE_{1,1}$ ed un $TM_{1,1}$ in guida d'onda rettangolare è svolta in Collins Op Cit. Pagg 129-132.

In tal caso, fissati gli indici $(\overline{m},\overline{n})$ non nulli, si hanno generalmente i quattro modi degeneri $\mathrm{TE}_{[\overline{m},\overline{n}]}$, $\mathrm{TM}_{(\overline{m},\overline{n})}$, $\mathrm{TE}_{[\overline{n},\overline{m}]}$, $\mathrm{TM}_{(\overline{n},\overline{m})}$ (in corrispondenza all'autovalore $K_t^2(\overline{m},\overline{n}) = -\left(\frac{\overline{m}\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\overline{n}\pi}{a}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{a^2}\left(\overline{m}^2 + \overline{n}^2\right)$.

Considerando uno degli indici nullo si hanno invece due modi degeneri (TE); specificatamente alla più bassa frequenza critica $f_c = \frac{c}{2a}$ corrispondono due modi dominanti $\mathrm{TE}_{[1,0]}$ e $\mathrm{TE}_{[0,1]}$, aventi il campo elettrico polarizzato rispettivamente secondo $\underline{y}_0$ e secondo $\underline{x}_0$. Questa situazione è praticamente sconsigliabile, in quanto per effetto di irregolarità della guida, si hanno facilmente delle conversioni d'energia fra i modi; avendo all'uscita dei dispositivi capaci ricevere dei modi polarizzati secondo una sola direzione, si possono avere conseguentemente forti perdite.

7.1.4 Potenza e attenuazione in guida rettangolare

Diamo ora l'espressione della potenza trasportata da un generico modo (***TE*** o ***TM***) in una guida d'onda rettangolare ideale ($\varepsilon_c = \varepsilon,\ g = \infty$).

Considerando la propagazione della sola onda diretta $\left(K_z = j\beta_z;\ Z_e = Z_h = P_2 e^{j\beta_z z}\right)$ ricordiamo brevemente il procedimento che ci ha consentito di scrivere la potenza (come parte reale del flusso su S del vettore di *Poynting*) in funzione del solo campo magnetico trasverso (5.13):

$$P = \frac{1}{2} Re \int_S \left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS = \frac{1}{2} Re \int_S \underline{E}_t \cdot \underline{H}_t{}^* \times \underline{z}_0 \, dS = \frac{1}{2} Re \int_S \left(Z_w \, \underline{H}_t \times \underline{z}_0\right) \times \underline{H}_t{}^* \cdot \underline{z}_0 \, dS =$$

$$= \frac{1}{2} Re(Z_w) \int_S \underline{z}_0 \cdot \left(\underline{H}_t \cdot \underline{H}_t{}^*\right) \cdot \underline{z}_0 \ dS = \frac{1}{2} Re(Z_w) \int_S \underline{H}_t \cdot \underline{H}_t{}^* \ dS = \frac{P_2 P_2^*}{2} Re(Z_w) \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \ dS$$

Nel nostro caso è $\underline{h}_t = h_x \underline{x}_0 + h_y \underline{y}_0$, quindi

$$P = \frac{P_2 P_2^*}{2} Re(Z_w) \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} h_x h_x^* + h_y h_y^* \, dx \, dy \qquad (7.22)$$

7.1.4.1 Onde TE

Come noto risulta essere:

$$\begin{cases} Z_w = \dfrac{j\omega\mu}{K_z} = \dfrac{\omega\mu}{\beta_z} \\ h_x = -C_2 D_2 \dfrac{j\beta_z}{K_t^2} \dfrac{m\pi}{a} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ h_y = -C_2 D_2 \dfrac{j\beta_z}{K_t^2} \dfrac{n\pi}{b} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \end{cases} \qquad (7.23)$$

Per un generico modo $\mathrm{TE}_{[m,n]}$ la potenza diviene:

$$P_{[m,n]} \equiv \frac{P_2 P_2^*}{2} \frac{\omega\mu}{\beta_z} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \frac{C_2^2 D_2^2 \beta_z^2}{K_t^4} \frac{m^2\pi^2}{a^2} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \frac{C_2^2 D_2^2 \beta_z^2}{K_t^4} \frac{n^2\pi^2}{b^2} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy$$

$$= \frac{P_2 P_2^* C_2^2 D_2^2 \mu}{2} \frac{\omega\beta_z}{K_t^4} \left[\frac{m^2\pi^2}{a^2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy \right]$$

Per m, n non nulli si dimostra:

$$I_1 = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy = \int_{x=0}^{x=a} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \int_{y=0}^{y=b} cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy =$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \int_{y=0}^{y=b} \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)\right] dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left[\frac{1}{2}\left(y + \frac{b}{2n\pi} sin\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)\right)\right]_0^b dx =$$

$$= \frac{b}{2} \int_{x=0}^{x=a} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{b}{2} \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)\right) dx = \left[\frac{b}{4}\left(x - \frac{a}{2m\pi} sin\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)\right)\right]_0^a = \frac{ab}{4}$$

E analogamente (sempre $m \neq 0, n \neq 0$) si dimostra che:

$$I_2 = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy = \int_{x=0}^{x=a} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \int_{y=0}^{y=b} sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \frac{ab}{4}$$

Quando uno dei due indici è nullo si ha inoltre:

$$\begin{cases} per\ m = 0, n \neq 0: & I_1 = 0, & I_2 = \dfrac{ab}{2} \\ per\ m \neq 0, n = 0: & I_1 = \dfrac{ab}{2}, & I_2 = 0 \end{cases}$$

In definitiva si ottiene per la potenza del modo $\mathrm{TE}_{[m,n]}$, osservando che:

$$m = 0 \implies K_t^2 = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}; \qquad n = 0 \implies K_t^2 = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}$$

$$P_{[m,n]} \equiv \frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2 \mu}{2} \frac{\omega \beta_z^2}{K_t^4} \left[\frac{m^2\pi^2}{a^2} I_1 + \frac{n^2\pi^2}{b^2} I_2 \right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2 \mu ab}{8} \dfrac{\omega\, \beta_{z[m,n]}}{K_{t[m,n]}^2}, & per\ m \neq 0, n \neq 0 \\ -\dfrac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2 \mu ab}{4} \dfrac{\omega \beta_{z[m,n]}}{K_{t[m,n]}^2}, & per \begin{cases} m = 0, n \neq 0 \\ m \neq 0, n = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{7.24}$$

In particolare, per il modo dominante $\mathrm{TE}_{[1,0]}$, si ha:

$$P_{[1,0]} = -\frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2 \mu\, ab}{4} \frac{\omega \beta_{z[1,0]}}{K_{t[1,0]}^2} \quad \text{con } K_{t[1,0]}^2 = -\frac{\pi^2}{a^2} \text{ e } \beta_{z[1,0]} = \frac{\sqrt{\omega\mu\varepsilon a^2 - \pi^2}}{a}$$

7.1.4.2 Onde TM

In tal caso le grandezze di interesse sono:

$$\begin{cases} Z_w = \dfrac{K_z}{j\omega\varepsilon} = \dfrac{\beta_z}{\omega\varepsilon} \\ h_x = -C_1 D_1 \dfrac{j\omega\varepsilon}{K_t^2} \dfrac{n\pi}{b} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \\ h_y = C_1 D_1 \dfrac{j\omega\varepsilon}{K_t^2} \dfrac{m\pi}{a} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right) \end{cases} \tag{7.25}$$

Pertanto, possiamo scrivere

$$P_{[m,n]} \equiv \frac{P_2 P_2^*}{2} \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \frac{C_1^2 D_1^2\, \omega^2\varepsilon^2}{K_t^4} \frac{n^2\pi^2}{a^2} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$
$$+ \frac{C_1^2 D_1^2\, \omega^2\varepsilon^2}{K_t^4} \frac{m^2\pi^2}{b^2} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy$$

$$= \frac{P_2 P_2^* \, C_1^2 D_1^2 \varepsilon \, \omega \beta_z}{2 K_t^4} \left[\frac{n^2\pi^2}{a^2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy \right.$$

$$\left. + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy \right]$$

Poiché per i modi ***TM*** (sempre $m \neq 0, n \neq 0$) segue, in virtù dei calcoli svolti al paragrafo precedente:

$$P_{[m,n]} \equiv -\frac{P_2 P_2^* \, C_1^2 D_1^2 \varepsilon \, ab}{8} \frac{\omega \, \beta_{z[m,n]}}{K_{t[m,n]}^2}, \qquad per\ m \neq 0, n \neq 0 \qquad (7.26)$$

Considerando la proprietà di ortogonalità delle funzioni goniometriche, del tipo:

$$\int_0^a sin\frac{r\pi x}{a} cos\frac{s\pi x}{a} dx = 0, \qquad per\ r \neq s$$

Si potrà dimostrare che *i modi non degeneri trasportano potenza in modo indipendente l'uno dall'altro*.

7.1.4.3 Attenuazione in guida rettangolare

Vogliamo ora calcolare la costante di attenuazione $\alpha_z(\omega)$ per il modo dominante $TE_{[1,0]}$.

A tal fine riprendiamo l'espressione generale ricavata per la $\alpha_z(\omega)$ per i ***TE***.

$$\boxed{\alpha_z(\omega) = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{Re\left\{\oint_S \frac{1}{2}\left(\underline{H}_\tau \times \underline{H}_\tau^*\right)\cdot \underline{n}_o \, ds\right\}}{Re\left\{\int_S \left(\underline{H}_t \times \underline{H}_t^*\right)\cdot \underline{z}_o\right\} dS}} \qquad (7.27)$$

Riscriviamo l'equazione della potenza dissipata in funzione del solo campo magnetico longitudinale h_z (§6,9)

$$P_d(z) = \frac{P_2 P_2^*}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}} \oint_s \left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial s}\right)^2 + h_z^2\right] ds$$

Giacché per il $TE_{[1,0]}$ è:

$$h_z = C_2 D_2 \cos\frac{\pi}{a}x$$

E il contorno s, percorso in verso antiorario è rappresentato in fig. 7.5:

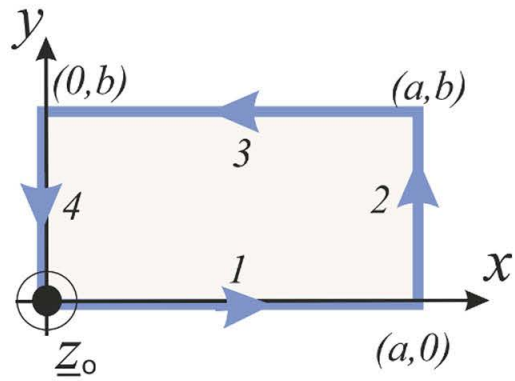


Figura 7.5 – percorso antiorario sul contorno s

$$\begin{cases} 0 \le x \le a \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = a \\ 0 \le y \le b \end{cases}; \begin{cases} 0 \le x \le a \\ y = b \end{cases}; \begin{cases} x = a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$$

Otteniamo per P_d:

$$P_d(z) = \frac{P_2 P_2^*}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\left\{\int_{x=0}^{x=a}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)^2 + h_z^2\right]_{y=0} dx + \int_{y=0}^{y=b}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)^2 + h_z^2\right]_{x=a} dy \right.$$
$$\left. + \int_{x=a}^{x=0}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)^2 + h_z^2\right]_{y=b} (-dx) + \int_{y=b}^{y=0}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)^2 + h_z^2\right]_{x=0} (-dy)\right\}$$

Poiché è:

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} = -C_2 D_2 \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}x; \quad \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0$$

Segue:

$$P_d(z) = \frac{P_2 P_2^*}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\left\{\int_{x=0}^{x=a}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4} C_2^2 D_2^2 \frac{\pi^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi}{a}x + C_2^2 D_2^2 \cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{y=0} dx \right.$$
$$+ \int_{y=0}^{y=b}\left[C_2^2 D_2^2 \cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{x=a} dy$$
$$+ \int_{x=0}^{x=a}\left[\frac{\beta_z^2}{K_t^4} C_2^2 D_2^2 \frac{\pi^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi}{a}x + C_2^2 D_2^2 \cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{y=b} dx$$
$$\left. + \int_{y=0}^{y=b}\left[C_2^2 D_2^2 \cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{x=0} dy\right\} =$$

$$= \frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\left\{2\int_{x=0}^{x=a}\frac{\beta_z^2}{K_t^4}\frac{\pi^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi}{a}x\ dx + 2\int_{x=0}^{x=a}\cos^2\frac{\pi}{a}x\, dx + \left[b\cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{x=a}\right.$$
$$\left. + \left[b\cos^2\frac{\pi}{a}x\right]_{x=0}\right\} =$$

$$= \frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\left\{\frac{\beta_{z[1,0]}^2}{K_{t[1,0]}^4}\frac{\pi^2}{a^2}a + a + 2b\right\} = \frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\left\{-\frac{\beta_{z[1,0]}^2}{K_{t[1,0]}^2}\ a + a + 2b\right\} =$$

$$= \frac{P_2 P_2^*\, C_2^2 D_2^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{1}{K_{t[1,0]}^2}\left(K^2 a + 2K_{t[1,0]}^2 b\right)$$

Siamo quindi in grado di esprimere la costante di attenuazione per il modo dominante in guida d'onda rettangolare:

$$\alpha_{z[1,0]}(\omega) = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{P_2 P_2^* C_2^2 D_2^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{1}{K_{t[1,0]}^2}\left(K^2 a + 2K_{t[1,0]}^2 b\right)}{-\frac{P_2 P_2^* C_2^2 D_2^2}{4}\mu\, ab\,\frac{\omega\,\beta_{z[1,0]}}{K_{t[1,0]}^2}}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\left(\omega^2\mu\varepsilon a - 2K_{t[1,0]}^2 b\right)}{\omega\mu ab\,\beta_{z[1,0]}}} \quad (7.28)$$

Per la $\alpha_{z[1,0]}(\omega)$ valgono chiaramente le considerazioni già fatte (§6,8) in particolare sull'andamento al variare di ω, che compare anche in $\beta_{z[1,0]}$, la dipendenza dalle dimensioni della guida è espressa tramite "a" e "b", nonchè $K_{t[1,0]}^2$ e $\beta_{z[1,0]}$; il mezzo influisce tramite la conducibilità g e la permeabilità μ del metallo (presenti in $Re\{Z_m\} = R_m = \sqrt{\mu\varepsilon/2g}$) e le μ, ε del dielettrico (avendo supposto con buona approssimazione che la μ del conduttore sia la stessa dell'isolante: entrambi materiali non ferromagnetici).

Con procedimenti del tutto analoghi, anche se analiticamente un po' più complessi, si sarebbe potuta calcolare la costante di attenuazione per i generici modi ***TE*** e ***TM***.

Con riferimento alle espressioni riportate da *Collin*[26], possiamo scrivere per la α_z (generalmente non valida per i modi degeneri):

1. Modi $TE_{[m,n]}$
   a. Per $m \neq 0, n = 0$:

$$\alpha_{z[m,0]}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\left(\omega^2\mu\varepsilon a - 2K_{t[m,0]}^2 b\right)}{\omega\mu ab\,\beta_{z[m,0]}} \quad (7.29)$$

   b. Per $n \neq 0$:

$$\alpha_{z[m,n]}(\omega) = 2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{b\beta_{t[m,n]}^2\left(\frac{m^2 ab + n^2 a^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}\right) - (a+b)K_{t[m,n]}^2}{\omega\mu ab\,\beta_{z[m,n]}} \quad (7.30)$$

2. Modi $TM_{(m,n)}$:

[26] Collin: Op.cit., pag 102

$$\alpha_{z(m,n)}(\omega) = 2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}\frac{\omega}{\beta_{z(m,n)}}\frac{\varepsilon}{ab}\left(\frac{m^2b^3+n^2a^3}{m^2b^2+n^2a^2}\right) \qquad (7.31)$$

Per queste formule teoriche va sempre tenuto presente il limite di validità in relazione alle approssimazioni eseguite.

Si può notare comunque che esse forniscono de valori che trovano riscontro nell'esperienza, allorquando le frequenze non sono troppo elevate.

Con il crescere delle frequenze infatti le attenuazioni misurate possono essere assai più elevate di quelle teoriche, in relazione al grado di scabrosità della superficie interna del mantello metallico: in tal caso lo spessore delle correnti superficiali diviene comparabile con l'ampiezza delle imperfezioni del metallo e l'area effettiva del mantello diviene ben maggiore, con perdite energetiche conseguentemente più alte: queste possono essere limitate, levigando opportunamente le pareti conduttrici interne al mantello.

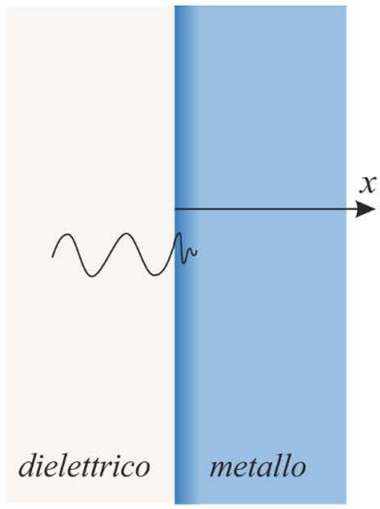


Figura 7.6 – Dielettrico-Metallo

Come noto, le dissipazioni di potenza sono collegate alle correnti che scorrono sulla superficie metallica (buon conduttore), essendo presente un campo elettrico tangenziale.

La profondità di penetrazione del campo è, alle frequenze tipiche delle *m.o.*, relativamente bassa (effetto pellicolare).

Si può ricavare infatti che l'ampiezza del campo dalla superficie verso l'interno del conduttore diminuisce esponenzialmente, secondo la legge e^{-x/p_s}, essendo x la distanza del punto dal piano metallico; p_s è la "*profondità di penetrazione*"; per essa si dimostra che:

$$p_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu g}} = \frac{1}{g\ Re\{Z_m\}};\ [L] \qquad (7.32)$$

Si vede che p_s decresce inversamente alla radice della frequenza, della conducibilità (nel caso ideale: $g \to \infty; p_s = 0$: corrente effettivamente senza spessore) e anche della

permeabilità del metallo (termine che assume un'importanza notevole solo se si considerano materiali ferromagnetici)

Può essere quindi facilmente calcolabile il campo di variazione di p_s in particolare riferimento alle frequenze tipiche delle microonde e ai materiali costituenti le pareti interne della guida (rame, argento, etc.).

Poiché p_s fornisce il valore secondo cui l'ampiezza del campo si riduce di $(1/e)$, possono già essere accettabili spessori metallici di circa $3\,p_s$ per il completo schermaggio.

7.2 GUIDA D'ONDA CIRCOLARE

Siamo interessati anche in questo caso allo studio dei campi ***TE*** e ***TM*** nell'ipotesi di guida ideale.

Data la particolare forma della struttura in esame (simmetria assiale) converrà rappresentare la guida attraverso un sistema di coordinate cilindriche (vedi fig. 7.7).

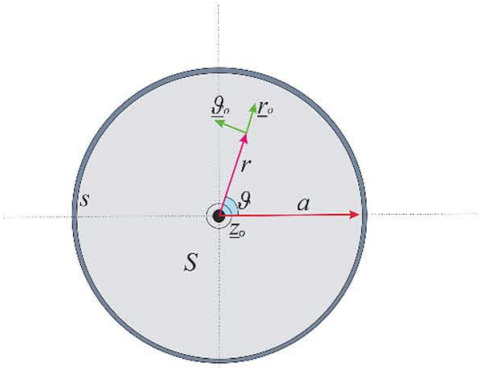


Figura 7.7 – Guida d'onda circolare rappresentata in coordinate cilindriche

La definizione di coordinate cilindriche (r, ϑ, z) è ben nota[27], le equazioni per il passaggio da un sistema cartesiano (x, y, z) a quello cilindrico sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ x = r\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}; \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = arctg\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{7.33}$$

La rappresentazione delle componenti trasversali dei campi ***TE*** e ***TM*** è ricavabile, come è noto, dalla risoluzione dell'equazione di *Helmholtz*:

$$\nabla_t^2 T = K_t^2 T, \quad \text{dove} \quad T = \begin{cases} h_z(r,\vartheta) & \text{per le onde } TE \\ e_z(r,\vartheta) & \text{per le onde } TM \end{cases}$$

Con le rispettive condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_z}{\partial n} = 0, & \text{sul contorno } s \text{ per le onde } TE \\ e_z = 0, & \text{sul contorno } s \text{ per le onde } TM \end{cases}$$

[27] Cfr. ad es. "G. Vaccaro: "*Lezioni di Geometria*", 2° ed. riv. pagg. 164-165

A tal fine ricordiamo che l'espressione del *Laplaciano* trasverso in coordinate cilindriche generalizzate (q_1, q_2, z):

$$\nabla_t^2[\cdot] = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}[\cdot]\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}[\cdot]\right)\right]$$

Nel sistema di riferimento scelto (r, ϑ, z) diviene:

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = 1$$

$$\nabla_t^2[\cdot] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}[\cdot]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}[\cdot] = \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\cdot] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\cdot] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}[\cdot]$$

L'equazione di *Helmholtz* assume pertanto la forma:

$$\nabla_t^2 T(r,\vartheta) = \frac{\partial^2 T(r,\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = K_t^2 T(r,\vartheta) \qquad [7.34]$$

Essa può essere risolta con il metodo di separazione delle variabili (cfr. a tal proposito le osservazioni §7.1.1); poniamo quindi l'autofunzione $T(r,\vartheta)$ uguale al prodotto di una funzione $R(r)$ della sola dimensioine r e di una $\Theta(\vartheta)$ della sola ϑ

$$T(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$$

L'equazione delle onde diviene perciò:

$$\nabla_t^2[R(r)\Theta(\vartheta)] = \Theta(\vartheta)\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{\Theta(\vartheta)}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{R(r)}{r^2}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2} = K_t^2[R(r)\Theta(\vartheta)]$$

L'autosoluzione nulla $(R(r) = 0, \Theta(\vartheta) = 0)$ è, come al solito priva di interesse (→ campo *e.m.*=0); dividiamo quindi ambo i membri dell'espressione precedente per $R(r)\Theta(\vartheta) \neq 0$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2} = K_t^2$$

Moltiplicando per r^2 si ottiene:

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2} - K_t^2 r^2 = 0$$

Ovvero

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} - K_t^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2} \qquad [7.35]$$

Con l'ultima forma si è voluto evidenziare l'uguaglianza tra il primo membro, che è una funzione della sola variabile r , ed il secondo mebro, che dipende solo da ϑ.

Affinché l'equazione possa essere soddisfatta, al variare di r, ϑ in S, entrambi i membri evono risultare costanti:

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr}-K_t^2r^2=-\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=\nu^2$$

Ovvero:

$$\begin{cases}\dfrac{r^2}{R(r)}\dfrac{d^2R(r)}{\partial r^2}+\dfrac{r}{R(r)}\dfrac{dR(r)}{dr}-K_t^2r^2-\nu^2=0\\ -\dfrac{1}{\Theta(\vartheta)}\dfrac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=\nu^2 \implies \dfrac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=-c^2\Theta(\vartheta)\end{cases} \qquad [7.36]$$

La seconda equazione scritta è ben nota in letteratura e rappresenta l'*equazione dei moti armonici*.

Per $\nu \neq 0$ la sua soluzione è del tipo:

$$\Theta(\vartheta)=A_1\sin\nu\vartheta+A_2\cos\nu\vartheta$$

Poiché ogni punto della guida nel piano trasverso è individuato dalle coordinate $r, \vartheta+2k\pi$ $(k=0,1,2\dots)$, per avere l'univocità di $\Theta(\vartheta)$ (e di conseguenza dell'autosoluzione e del campo *e.m.*) deve essere:

$$\Theta(\vartheta)=\Theta(\vartheta+2k\pi)\ con\ k=0,1,2\dots$$

$$A_1\sin\nu\vartheta+A_2\cos\nu\vartheta=A_1\sin\nu(\vartheta+2k\pi)+A_2\cos\nu(\vartheta+2k\pi)\implies$$

$$\begin{aligned}A_1\sin\nu\vartheta+A_2\cos\nu\vartheta&\\ =A_1\sin\nu\vartheta\cos 2k\pi\nu+A_1\cos\nu\vartheta\sin 2k\pi\nu+A_2\cos\nu\vartheta\cos 2k\pi\nu&\\ -A_2\sin\nu\vartheta\sin 2k\pi\nu&\end{aligned}$$

L'uguaglianza tra i due termini è verificata per ogni ϑ, se e solo se ν risulta intero (in modo che $\cos 2k\pi\nu=1, \sin 2k\pi\nu=0$): scegliendo per ν la determinazione positiva di $\sqrt{\nu^2}$, abbiamo cioè:

$$\nu=n=1,2,3,\dots$$

Per $\nu=0$ l'equazione dei modi armonici diviene:

$$\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=0$$

La cui soluzione generica è del tipo:

$$\Theta(\vartheta) = A_1\,\vartheta + A_2$$

Dovendo ancora essere per ogni ϑ (e per k intero qualsiasi):

$$\Theta(\vartheta + 2k\pi\,) = \Theta(\vartheta) \implies A_1\,(\vartheta + 2k\pi\,) + A_2 = A_1\,\vartheta + A_2$$

Segue necessariamente che $A_1 = 0$

La soluzione ora trovata $\Theta(\vartheta) = A_2$ è ancora ricavabile dalla $\Theta(\vartheta) = A_1 \sin \nu\vartheta + A_2 \cos \nu\vartheta$, qualora si ponga ν nullo.

In definitiva, con le limitazioni imposte, l'espressione generale della $\Theta(\vartheta)$ è:

$$\Theta(\vartheta) = A_1 \sin n\vartheta + A_2 \cos n\vartheta\,, \qquad con\; n = 0,1,2,\ldots \qquad [7.37]$$

In virtù dei risultati precedenti ($\nu = n$), la $R(r)$ può essere ottenuta dall'equazione differenziale:

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} - K_t^2 r^2 - n^2 = 0$$

Moltiplicando per $R(r)/r^2$ (con $r \neq 0$) segue:

$$\frac{d^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \left(-K_t^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0$$

Questa equazione può essere ricondotta ad una forma più nota, con semplici operazioni.

Essendo il generico autovalore K_t^2 reale negativo, poniamo allora:

$$-K_t^2 = \chi^2$$

Per cui χ^2 risulta una quantità reale positiva; eseguiamo quindi il cambio di variabile (con $\chi = +\sqrt{\chi^2} > 0$):

$$x = \chi r \implies r = \frac{x}{\chi}$$

Si ha:

$$\frac{dR(x)}{dr} = \frac{dR(x)}{dx}\frac{dx}{dr} = \chi\frac{dR(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2R(x)}{\partial r^2} = \frac{d}{dr}\left(\chi\frac{dR(x)}{dx}\right) = \chi\frac{d}{dx}\left(\frac{dR(x)}{dr}\right) = \chi\frac{d}{dx}\left(\chi\frac{dR(x)}{dx}\right) = \chi^2\frac{d^2R(x)}{\partial x^2}$$

In tal modo l'equazione in esame diviene:

$$\chi^2 \frac{d^2R(x)}{\partial x^2} + \frac{\chi^2}{x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\chi^2 R(x) = 0$$

Che divisa per χ^2, assume definitivamente la forma ricercata:

$$\frac{d^2R(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)R(x) = 0$$

Questa equazione differenziale, lineare, omogenea, del 2° ordine è la nota *equazione di Bessel*, nel caso particolare di parametro ($\nu = n$); la sua soluzione generale è esprimibile come combinazione lineare di due integrali particolari $\mathcal{J}_n(x)$ e $\mathcal{Y}_n(x)$, rispettivamente detti funzione di *Bessel* [28]di 1° e 2° specie:

$$R(x) = B_1\mathcal{J}_n(x) + B_2\mathcal{Y}_n(x)$$

Accenniamo brevemente qui alle fondamentali caratteristiche delle funzioni di *Bessel* onde ricavarne l'andamento grafico.

La funzione di Bessel di 1° specie d'ordine intero è esprimibile analiticamente sottoforma di serie di potenze:

$$\mathcal{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\ (n+k)!}$$

Essa è genericamente ricavabile dalla ***F.d.B.*** di 1° specie d'ordine ν (reale), ponendo $\nu = n$; l'intero n può essere considerato $\lessgtr 0$, valendo la proprietà per cui:

$$\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$$

La ***F.d.B.*** di 2° specie di ordine intero si ottiene come limite per $\nu \to n$ della:

$$\mathcal{Y}_n(x) = \frac{\mathcal{J}_n(x)\ cos(\pi\nu) - \mathcal{J}_{-n}(x)}{sin(\pi\nu)}$$

Si ha:

---

[28] Trattazioni sufficientemente esaurienti sulle funzioni di *Bessel* e loro proprietà, possono trovarsi in molteplici testi, per la formulazione teorica si potrà consultare:

A. Ghizzetti, F. Mazzarella, A. Ossicini: "*Lezioni di complementi di matematica*" 1° ed., pagg 420 e seguenti (in particolare cfr. infra. teorema 6.8.1)

Abramowitz M., Stegun I.A.: "*Handbook of mathematical functions*", ed Dover 1970, con abachi e tabelle.

N.W. Mclachlan: "*Bessel functions for Engineers*", Oxford University Press, 1°ed. New York 1934.

$$\mathcal{Y}_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{2\left(\gamma + \log\frac{x}{2}\right)\mathcal{J}_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\ (n+k)!}[\Phi(k)+\Phi(n+k)]\right\}$$

Avendo indicato con:

$$\Phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}; \qquad \gamma = 0{,}577 \text{ (costante di Eulero)}$$

Si può vedere che $\mathcal{Y}_n(x)$ e $\mathcal{Y}_n(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale di *Bessel* (con parametro intero) e, come già noto, una loro combinazione lineare ne fornisce la soluzione generale.

Valgono per le ***F.d.B.*** importanti formule di ricorrenza; ad es.

$$x\,\mathcal{J}_{\nu+1}(x) = \nu\,\mathcal{J}_\nu(x) - x\,\mathcal{J}'_\nu(x)$$

E in particolare per $\nu = 0$:

$$\mathcal{J}'_0(x) = -\mathcal{J}_1(x)$$

(per la $\mathcal{Y}_\nu(x)$ si hanno relazioni perfettamente analoghe).

Per quanto riguarda il loro comportamento nell'origine si ha poi che:

per $x \to 0^+$: $\mathcal{J}_\nu(x) \sim x^\nu / 2^\nu \Gamma(\nu+1)$ con ν reale $\neq -1, -2, \ldots$

(avendo indicato con $\Gamma(\alpha)$ la funzione euleriana di 2° specie, o funzione gamma, prolungata per α negativi, ma non interi). Ancora si ha:

per $x \to 0^+$: $\mathcal{Y}_n(x) \sim -2^n(n-1)!/\pi x^n$ per $n \neq 0$; $\mathcal{Y}_0(x) \sim (2/\pi)\log(x/2)$ mentre le $\mathcal{J}_n(x)$ hanno, per $n \neq 0$, degli zeri d'ordine n nell'origine ($e: \mathcal{J}_0(0) = 1$), le $\mathcal{Y}_n(x)$ per $x \to 0^+$ divergono a $+\infty$, con ordine n per $n \neq 0$, come il log per $n = 0$.

Gli sviluppi asintotici permettono poi di scrivere (per ordine intero $\nu = n$):

$$\begin{cases} \mathcal{J}_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4} - \nu\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-3/2}\right), & per\ x \to \infty \\ \mathcal{Y}_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4} - \nu\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-3/2}\right), & per\ x \to \infty \end{cases}$$

Esse vanno quindi a zero (con ordine ½) per $x \to \infty$ annullandosi infinite volte; in particolare tendono ad assumere approssimativamente la forma di sinusoidi

smorzate: infatti per k intero abbastanza grande, i valori degli zeri delle $\mathcal{J}_\nu(x)$ e $\mathcal{Y}_\nu(x)$ sono dati all'incirca dalle:

$$\begin{cases} x_k = \frac{3}{4}\pi + \nu\frac{\pi}{2} + k\pi, & per\ la\ \mathcal{J}_\nu(x) \\ x_k = \frac{1}{4}\pi + \nu\frac{\pi}{2} + k\pi, & per\ la\ \mathcal{Y}_\nu(x) \end{cases}$$

Si hanno pertanto per le $\mathcal{J}_n(x)$ e $\mathcal{Y}_n(x)$ i tipici andamenti di fig. 7.8

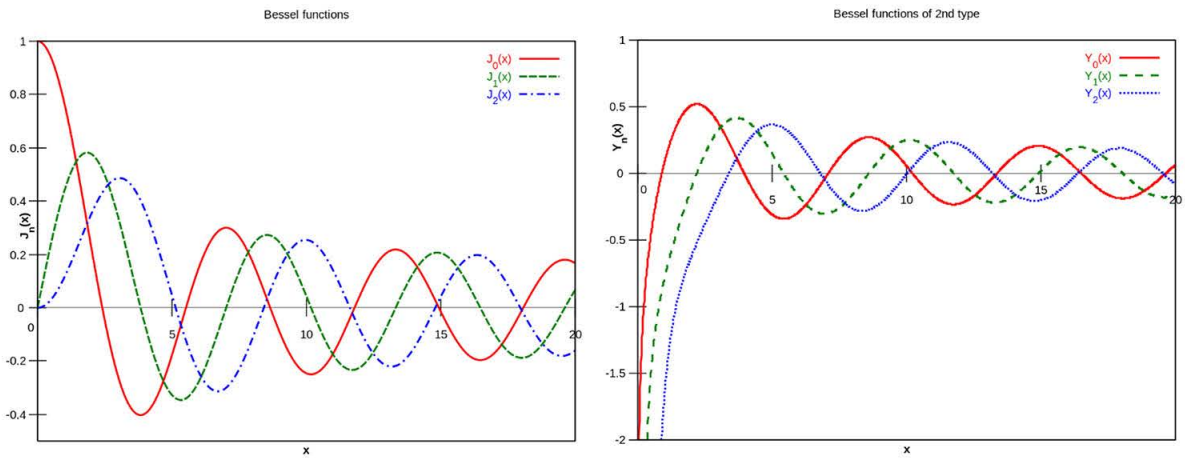


Figura 7.8 – Funzioni di Bessel di 1° e 2° specie

L'equazione differenziale di *Bessel*, come già osservato, è in genere definita per $x > 0$ ($\rightarrow r > 0$); la sua soluzione generale ha una singolarità per $x = 0$ ($r = 0$), dovuta alla presenza della $\mathcal{Y}_n(x)$ che diverge, $\forall n$, per $x \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$). Poichè la $R(x)$ è direttamente collegata ai valori delle grandezze fisiche del campo *e.m.*, essa deve risultare determinata e finita in ogni punto della guida, compresi quelli dell'asse $r = 0$.

Ciò può verificarsi qualora ci si riferisca a soluzioni dell'equazione di *Bessel* in cui ponendo $B_2 = 0$, non compare il termine divergente per r nullo, pertanto si ha:

$$R(r) = B_1\mathcal{J}_n(\chi r)$$

L'autosoluzione $T(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$ dell'equazione di *Helmholtz* in coordinate polari assume la forma:

$$T(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta) = B_1\mathcal{J}_n(\chi r)[A_1 \sin n\vartheta + A_2 \cos n\vartheta]$$

Questa può essere posta in forma più compatta, infatti le costanti A_1, A_2 possono sempre essere espresse in funzione di un'altra opportuna coppia di costanti (P, φ) mediante le relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = -P \sin\varphi \\ A_2 = P \cos\varphi \end{cases}$$

In tal modo si ha:

$$A_1 \sin n\vartheta + A_2 \cos n\vartheta = -P \sin\varphi \sin n\vartheta + P \cos\varphi \cos n\vartheta = P \cos(n\vartheta + \varphi)$$

Ponendo $B_1 P = C$ abbiamo la forma:

$$T(r,\vartheta) = C\, \mathcal{J}_n(\chi r)\, \cos(n\vartheta + \varphi), \qquad con\ n = 0,1,2,\dots;\ \chi = +\sqrt{-K_t^2}$$

(Il significato fisico delle costanti (C, φ) sarà chiarito in seguito).

Analizzeremo ora l'espressione dei campi ***TE*** e ***TM*** che si hanno in una guida d'onda ideale a sezione circolare.

7.2.1 Onde TE

L'autosoluzione $T(r,\vartheta)$ è, per i modi ***TE***, in base a quanto detto:

$$h_z(r,\vartheta) = C\, \mathcal{J}_n(\chi r)\, \cos(n\vartheta + \varphi)$$

Essa deve soddisfare, come noto, alla condizione sul contorno s:

$$\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial n} = 0$$

Sul nostro sistema di riferimento si può facilmente osservare che il versore $\underline{n}_0$ della normale al mantello metallici ha la direzione radiale $(\underline{n}_0 \equiv \underline{r}_0\ su\ s)$; per cui, avendo indicato con "a" il raggio della sezione della guida, la condizione al contorno diviene (per $r = a, \forall c$):

$$\left.\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

Che sviluppata da:

$$C\ \cos(n\vartheta + \varphi)\ \left.\frac{\partial \mathcal{J}_n(\chi r)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

Dovendo questa equazione essere verificata per qualsiasi valore di ϑ, segue:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{J}_n(\chi r)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{J}_n'(\chi a) = 0$$

Tale equazione è verificata per quei particolari valori di χa in corrispondenza dei quali la $\mathcal{J}_n(\chi a)$ ha dei massimi e minimi relativi: per quanto detto queste soluzioni sono una infinità numerabile.

n/m	1	2	3	4
0	3.832	7.016	10.174	13.324
1	1.841	5.331	8.536	11.792
2	3.054	6.706	9.969	13.170

Tabella 7.2 – Zeri della funzione Bessel di 1° specie $\xi'_{n,m}$

Indichiamo così con $\xi'_{[n,m]} = \overline{\chi} a$ l'm-esimo zero (ordinato secondo valori crescenti dell'argomento > 0) della derivata della funzione di Bessel di 1° specie d'ordine n: pertanto ogni coppia di indici (n, m) individua il relativo $\overline{\chi}$ per cui:

$$\overline{\chi} = \chi_{[n,m]} = \frac{\xi'_{[n,m]}}{a}$$

Ricordando che si era posto $\chi^2 = -K_t^2$ è quindi determinato lo spettro degli autovalori dei modi ***TE*** in guida d'onda circolare (si vede ancora che i K_t^2 sono una infinità numerabile):

$$K^2_{t[n,m]} = -\frac{\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2}{a^2} \; con \; n = 0,1,2,\dots; \quad m = 1,2,3,\dots$$

Si noti che nell'ordinare le radici della $\mathcal{J}_n'(\chi a) = 0$ non si è considerato lo zero $\xi' = \chi a = 0 \; (\forall n)$; per esso, cui corrisponde l'autovalore K_t^2 nullo, si ha infatti:

$$\begin{cases} per \; n \neq 0 \; (\rightarrow \mathcal{J}_n(0) = 0) & \Longrightarrow \; h_z(r,\vartheta) = 0 \\ per \; n = 0 \; (\rightarrow \mathcal{J}_0(0) = 1) & \Longrightarrow \; h_z(r,\vartheta) = C\cos(\varphi) \end{cases}$$

Come al solito l'autosoluzione nulla o costante, dando luogo a campi *e.m.* privi di interesse, non viene presa in esame: in effetti K_t^2 è reale negativo.

Il generico modo $\boldsymbol{TE}_{[m,n]}$ è pertanto ricavabile dall'autofunzione:

$$h_z(r,\vartheta) = C\,\mathcal{J}_n\left(\frac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right)\cos(n\vartheta + \varphi)$$

Nell'espressione $h_z(r,\vartheta)$, la costante di ampiezza C (legata come sempre alla soluzione del problema omogeneo di *Helmholtz*) è generalmente individuabile dalle condizioni di eccitazione.

La costante φ (angolo di fase) è connessa alla polarizzazione iniziale dell'onda *e.m.* (se ne discuterà in seguito nel caso dominante).

Osservato ciò deduciamo le varie componenti del campo $\mathrm{TE}_{[m,n]}$ con riferimento alle formule del §6.4, ricordiamo che in coordinate polari si ha[29]:

$$\nabla_t[\cdot] = \frac{\underline{q}_{10}}{h_1}\frac{\partial[\cdot]}{\partial q_1} + \frac{\underline{q}_{20}}{h_2}\frac{\partial[\cdot]}{\partial q_2} = \underline{r}_0\frac{\partial[\cdot]}{\partial r} + \underline{\vartheta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial[\cdot]}{\partial \vartheta}$$

Segue quindi per $\underline{h}_t(r,\vartheta)$:

$$\begin{aligned}\underline{h}_t(r,\vartheta) = h_r(r,\vartheta)\,\underline{r}_0 + h_\vartheta(r,\vartheta)\,\underline{\vartheta}_0 &= \frac{K_{z[n,m]}}{K^2_{t[n,m]}}\nabla_t h_z(r,\vartheta)\\ &= \frac{K_{z[n,m]}}{K^2_{t[n,m]}}\left(\underline{r}_0\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r} + \underline{\vartheta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)\\ &= \left[\frac{K_{z[n,m]}}{K^2_{t[n,m]}}\mathrm{C}\frac{\xi'_{[n,m]}}{a}\mathcal{J}'_n\left(\frac{\xi'_{[n,m]}}{a}r\right)\cos(n\vartheta+\varphi)\right]\underline{r}_0\\ &+ \left[-\frac{K_{z[n,m]}}{K^2_{t[n,m]}}\mathrm{C}n\frac{\mathcal{J}_n\left(\frac{\xi'_{[n,m]}}{a}r\right)}{r}\sin(n\vartheta+\varphi)\right]\underline{\vartheta}_0\end{aligned}$$

Per il calcolo di $\underline{e}_t(r,\vartheta)$:

$$\underline{e}_t(r,\vartheta) = e_r(r,\vartheta)\,\underline{r}_0 + e_\vartheta(r,\vartheta)\,\underline{\vartheta}_0 = \frac{j\omega\mu}{K_{z[n,m]}}\underline{h}_t(r,\vartheta)\times\underline{z}_0 = \frac{j\omega\mu}{K_{z[n,m]}}\begin{bmatrix}\underline{r}_0 & \underline{\vartheta}_0 & \underline{z}_0\\ h_r(r,\vartheta) & h_\vartheta(r,\vartheta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{j\omega\mu}{K_{z[n,m]}}h_\vartheta(r,\vartheta)\right)\underline{r}_0 + \left(-\frac{j\omega\mu}{K_{z[n,m]}}h_r(r,\vartheta)\right)\underline{\vartheta}_0$$

Riassumiamo le componenti trasverse di un'onda ***TE*** in guida circolare ideale:

[29] Cfr. ancora ad es. Barzilai, op. cit., pagg. 35-36

$$\begin{cases} e_r(r,\vartheta) = -C\dfrac{j\omega\mu}{K_{t[n,m]}^2} n \dfrac{\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right)}{r} \sin(n\vartheta+\varphi) \\ e_\vartheta(r,\vartheta) = -\mathrm{C}\dfrac{j\omega\mu}{K_{t[n,m]}^2} \dfrac{\xi'_{n,m}}{a} \mathcal{J}'_n\left(\dfrac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right) \cos(n\vartheta+\varphi) \\ e_z(r,\vartheta) = 0 \\ h_r(r,\vartheta) = \mathrm{C}\dfrac{K_{z[n,m]}}{K_{t[n,m]}^2} \dfrac{\xi'_{n,m}}{a} \mathcal{J}'_n\left(\dfrac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right) \cos(n\vartheta+\varphi) \\ h_\vartheta(r,\vartheta) = -C\dfrac{K_{z[n,m]}}{K_{t[n,m]}^2} n \dfrac{\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right)}{r} \sin(n\vartheta+\varphi) \\ h_z(r,\vartheta) = C\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi'_{[n,m]}}{a} r\right) \cos(n\vartheta+\varphi) \end{cases} \quad [7.50]$$

Essendo la dipendenza longitudinale sempre del tipo (onda diretta + onda riflessa):

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \end{cases}$$

Si ha in definitiva, per il generico modo ***TE***:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t = \underline{e}_t(r,\vartheta)\, Z_e(z) = [e_r(r,\vartheta)\, Z_e(z)]\, \underline{r}_0 + [e_\vartheta(r,\vartheta)\, Z_e(z)]\, \underline{\vartheta}_0 \\ \underline{H} = \underline{H}_t + h_z \underline{z}_0 = \underline{h}_t(r,\vartheta) Z_h(z) + h_z(r,\vartheta) Z_e(z)\, \underline{z}_0 = [h_r(r,\vartheta)\, Z_h(z)]\, \underline{r}_0 + \\ \quad + [h_\vartheta(r,\vartheta)\, Z_h(z)]\, \underline{\vartheta}_0 + [h_z(r,\vartheta)\, Z_e(z)]\, \underline{z}_0 \end{cases}$$

La costante di propagazione $K_{z[n,m]}$ diviene quindi:

$$K_{z[n,m]} = \sqrt{K^2 - K_{t[n,m]}^2} = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c + \frac{\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2}{a^2}}$$

Per il calcolo della frequenza di taglio si ha, per dielettrici non dissipativi:

$$\omega_c^2\mu\varepsilon_c = -K_{t[n,m]}^2 = \frac{\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2}{a^2} \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\xi'_{[n,m]}}{a} \Longrightarrow f_{c[n,m]} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \frac{\xi'_{[n,m]}}{a} \Longrightarrow \lambda_{c[n,m]} = \frac{2\pi a}{\xi'_{[n,m]}}$$

Come al solito si può osservare che le $f_{c[n,m]}$ dipendono solo dalla struttura (tramite μ, ε del dielettrico e la dimensione della sezione).

Con riferimento ai dati di tabella 7.2, si nota che il valore minimo di f_c al variare di m, n si ottiene in corrispondenza del primo zero della derivata della funzione di Bessel di prima specie d'ordine 1 ($m = n = 1$); poiché $\xi'_{[1,1]} = 1{,}841$ si ha:

$$f_{c[1,1]} = \frac{c}{2\pi}\frac{\xi'_{[1,1]}}{a} = 0{,}293\frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{c[1,1]} = 3{,}413\, a$$

Per quanto detto in precedenza (cfr. §7.1.1), il modo $TE_{[1,1]}$ è il modo dominante in guida d'onda circolare. (Esso verrà esaminato in particolare nel seguito)

7.2.2 *Onde TM*

L'autosoluzione $T(r,\vartheta)$ dell'equazione di *Helmholtz* per i campi ***TM*** è espressa dalla:

$$e_z(r,\vartheta) = C\, \mathcal{J}_n(\chi r)\, \cos(n\vartheta + \varphi)\,; \quad n = 0,1,2,\ldots; \quad \chi = +\sqrt{-K_t^2}$$

E la condizione al contorno che deve soddisfare è:

$$e_z(r,\vartheta) = 0 \quad su \quad s\,(r = a, \qquad \forall\vartheta)$$

Cioè:

$$C\, \mathcal{J}_n(\chi r)\, \cos(n\vartheta + \varphi)|_{r=a} = 0, \qquad \forall\vartheta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}_n(\chi a) = 0$$

I valori di χa per cui la generica ***F.d.B.*** $\mathcal{J}_n(\chi a)$ si annulla sono, come è ormai noto, un'infinità numerabile (fig. 7.9)

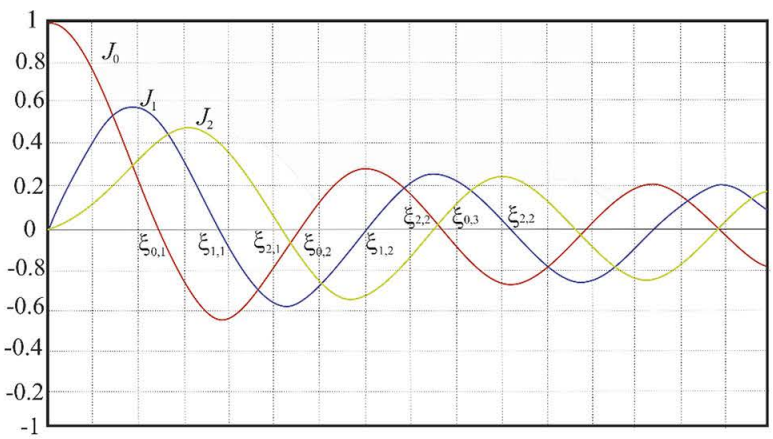


Figura 7.9 – Zeri della funzione Bessel di 1° specie $\xi_{(n,m)}$

Indicando con $\xi_{[n,m]} = a\overline{\chi}$ l'm-esimo zero (ordinato secondo valori crescenti dell'argomento > 0) della ***F.d.B.*** di 1° specie d'ordine n, possiamo ancora ricavare lo spettro degli autovalori per i modi ***TM***, al variare degli indici (n,m); sia ha infatti:

$$\overline{\chi} = \chi_{(n,m)} = \frac{a}{\xi_{(n,m)}}$$

Da cui:

$$K^2_{t[n,m]} = -\chi^2_{t[n,m]} = -\frac{\left(\xi_{(n,m)}\right)^2}{a^2}, \qquad con\ n = 0,1,2,\ldots;\ \ m = 1,2,3,\ldots$$

n\m	1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Tabella 7.9 – Zeri della funzione Bessel di 1° specie $\xi_{(n,m)}$

Ovviamente non si è considerato, per $n \neq 0$, come primo zero $\xi = a\chi = 0$ ($\rightarrow K_t^2 = 0$); ad esso corrisponde infatti l'autofunzione $e_z(r,\vartheta) \equiv 0$, priva di interesse pratico. Ancora una volta il K_t^2 è ritenuto reale negativo.

L'autofunzione $e_z(r,\vartheta)$ diviene così:

$$e_z(r,\vartheta) = C\, \mathcal{J}_n\left(\frac{\xi_{(n,m)}}{a} r\right) \cos(n\vartheta + \varphi)$$

Le costanti C e φ hanno lo stesso significato delle corrispondenti per i modi ***TE***.

Come al solito, nota la $e_z(r,\vartheta)$, possono ricavarsi completamente le configurazioni dei modi $\mathrm{TM}_{(n,m)}$.

Riferendoci alle formule dei modi (Cfr. §6.5) abbiamo:

$$\underline{e}_t(r,\vartheta) = e_r(r,\vartheta)\,\underline{r}_0 + e_\vartheta(r,\vartheta)\,\underline{\vartheta}_0 = \frac{K_{z(n,m)}}{K_{t(n,m)}^2}\nabla_t e_z(r,\vartheta) = \frac{K_{z(n,m)}}{K_{t(n,m)}^2}\left(\underline{r}_0\frac{\partial e_z(r,\vartheta)}{\partial r} + \underline{\vartheta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial e_z(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)$$

$$=$$

$$= \left[\frac{K_{z(n,m)}}{K_{t(n,m)}^2}\mathrm{C}\frac{\xi_{(n,m)}}{a}\mathcal{J}_n'\left(\frac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)\cos(n\vartheta+\varphi)\right]\underline{r}_0$$

$$+\left[-\frac{K_{z(n,m)}}{K_{t(n,m)}^2}\mathrm{C}n\frac{\mathcal{J}_n\left(\frac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)}{r}\sin(n\vartheta+\varphi)\right]\underline{\vartheta}_0$$

$$\underline{h}_t(r,\vartheta) = h_r(r,\vartheta)\,\underline{r}_0 + h_\vartheta(r,\vartheta)\,\underline{\vartheta}_0 = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_{z(n,m)}}\underline{z}_0 \times \underline{e}_t(r,\vartheta) = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_{z(n,m)}}\begin{bmatrix} \underline{r}_0 & \underline{\vartheta}_0 & \underline{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e_r(r,\vartheta) & e_\vartheta(r,\vartheta) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{j\omega\varepsilon_c}{K_{z(n,m)}}e_\vartheta(r,\vartheta)\right)\underline{r}_0 + \left(\frac{j\omega\varepsilon_c}{K_{z(n,m)}}e_r(r,\vartheta)\right)\underline{\vartheta}_0$$

Dalle quali si ricavano:

$$\begin{cases} e_r(r,\vartheta) = C\dfrac{K_{z(n,m)}}{K^2_{t(n,m)}}\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}\dfrac{\mathcal{J}'_n\left(\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)}{r}\ \cos(n\vartheta+\varphi) \\ e_\vartheta(r,\vartheta) = -\mathrm{C}\dfrac{K_{z(n,m)}}{K^2_{t(n,m)}}n\,\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)\sin(n\vartheta+\varphi) \\ e_z(r,\vartheta) = C\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)\cos(n\vartheta+\varphi) \\ h_r(r,\vartheta) = \mathrm{C}\dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K^2_{t(n,m)}}n\mathcal{J}_n\left(\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)\sin(n\vartheta+\varphi) \\ h_\vartheta(r,\vartheta) = C\dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K^2_{t(n,m)}}\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}\mathcal{J}'_n\left(\dfrac{\xi_{(n,m)}}{a}r\right)\ \cos(n\vartheta+\varphi) \\ h_z(r,\vartheta) = 0 \end{cases} \qquad [7.60]$$

$$\begin{cases} Z_e(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t + E_z\underline{z}_0 = \underline{e}_t(r,\vartheta)\,Z_e(z) + e_z(r,\vartheta)Z_h(z)\,\underline{z}_0 = [e_r(r,\vartheta)\,Z_e(z)]\,\underline{r}_0 + [h_\vartheta(r,\vartheta)\,Z_e(z)]\,\underline{\vartheta}_0 + \\ \qquad +[e_z(r,\vartheta)\,Z_h(z)]\,\underline{z}_0 \\ \underline{H} = \underline{H}_t = \underline{h}_t(r,\vartheta)Z_h(z) = [h_r(r,\vartheta)\,Z_h(z)]\,\underline{r}_0 + [h_\vartheta(r,\vartheta)\,Z_h(z)]\,\underline{\vartheta}_0 \end{cases}$$

Si ha inoltre per K_z:

$$K_{z(n,m)} = \sqrt{K^2 - K^2_{t(n,m)}} = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c + \frac{\left(\xi_{(n,m)}\right)^2}{a^2}}$$

Per il calcolo della frequenza di taglio si ha, per dielettrici non dissipativi ($\varepsilon_c = \varepsilon$):

$$\omega_c^2\mu\varepsilon = -K^2_{t(n,m)} = \frac{\left(\xi_{(n,m)}\right)^2}{a^2} \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\xi_{(n,m)}}{a} \Longrightarrow f_{c(n,m)} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\frac{\xi_{(n,m)}}{a} \Longrightarrow \lambda_{c(n,m)} = \frac{2\pi a}{\xi_{(n,m)}}$$

7.2.3 Modo dominante e spettro dei modi

Riferendosi ai dati forniti dai grafici e dalle tabelle sulle funzioni di Bessel e le loro derivate, è possibile ricavare lo spettro dei modi di propagazione in guida d'onda circolare (di raggio a).

Infatti, dall'esame della figura 7.10, ricordando che:

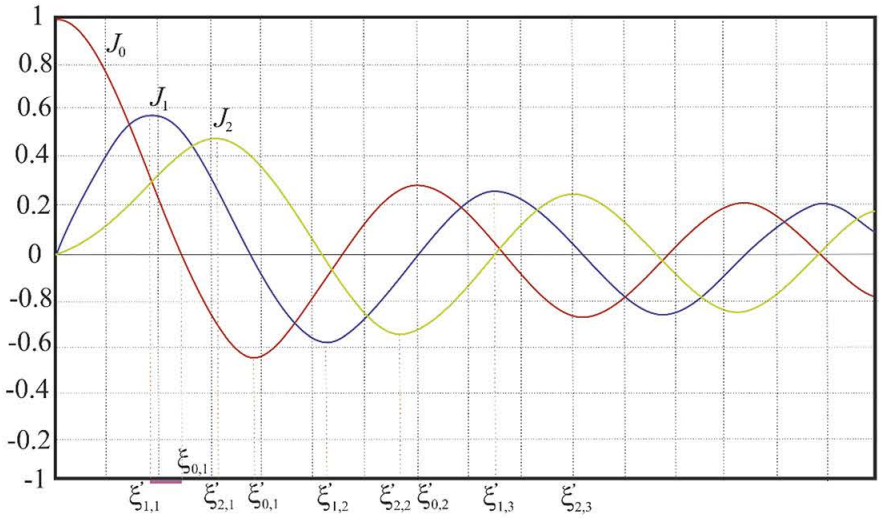


Figura 7.10 – Spettro dei modi guida circolare

TE	**TM**
$K^2_{t[n,m]} = -\frac{\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2}{a^2}$	$K^2_{t(n,m)} = \frac{\left(\xi_{(n,m)}\right)^2}{a^2}$
$f_{c[n,m]} = \frac{c}{2\pi}\frac{\xi'_{[n,m]}}{a}$	$f_{c(n,m)} = \frac{c}{2\pi}\frac{\xi_{(n,m)}}{a}$
$\lambda_{c[n,m]} = \frac{2\pi a}{\xi'_{[n,m]}}$	$\lambda_{c(n,m)} = \frac{2\pi a}{\xi_{(n,m)}}$

Si ottengono i valori della tabella 7.3 per i primi modi relativamente alle sole funzioni di Bessel d'ordine $n = 0,1,2$ e loro derivate.

Nella banda di frequenze compresa tra $\frac{8{,}734}{a}$ e $\frac{11{,}475}{a}GHz$ (caso ideale) si ha la propagazione del solo modo dominante $TE_{[1,1]}$ che è rappresentato dalle [7.50] in cui $n = 1, m = 1$:

Ordine	*Modi*	*Zeri*	$a^2\lvert K_t^2\rvert^{(*)}$	af_c^*	λ_c/a^*
1	$TE_{1,1}$	*1.841*	*3.309*	*8.784*	*3.413*
2	$TM_{0,1}$	*2.405*	*5.784*	*11.473*	*2.613*
3	$TE_{2,1}$	*3.054*	*9.327*	*14.572*	*2.057*
4	$TE_{0,1}, TM_{1,1}$	*3.832*	*14.684*	*18.284*	*1.640*
5	$TM_{2,1}$	*5.135*	*26.368*	*24.501*	*1.224*
6	$TE_{1,2}$	*5.331*	*28.420*	*25.437*	*1.179*
7	$TM_{0,2}$	*5.520*	*30.470*	*26.338*	*1,138*
8	$TE_{2,2}$	*6.706*	*44.970*	*31.997*	*0.937*
9	$TE_{0,2}, TM_{1,2}$	*7.016*	*49.224*	*33.477*	*0.396*
10	$TM_{2,2}$	*8.417*	*70,846*	*40.161*	*0.746*
11	$TE_{1,3}$	*8.536*	*72.853*	*40.729*	*0.736*
12	$TM_{0,3}$	*8.654*	*74.892*	*41.292*	*0.726*
13	$TE_{2,3}$	*9.970*	*99.401*	*47.572*	*0,630*
(*) I valori numerici sono ottenuti considerando il raggio "a" della guida espresso in cm ($\rightarrow K_t^2$ *in* cm^{-2}, λ_c *in cm) e* f_c *in GHz.*					

Tabella 7.3 – Grandezze caratteristiche dei modi auida circolare

$$\mathrm{TE}_{[1,1]} \Longrightarrow \begin{cases} e_r(r,\vartheta) = C\dfrac{j\omega\mu\, a^2}{\left(\xi'_{[1,1]}\right)^2}\dfrac{\mathcal{J}_1\left(\dfrac{\xi'_{[1,1]}}{a}r\right)}{r}\ \sin(\vartheta+\varphi) \\ e_\vartheta(r,\vartheta) = \mathrm{C}\dfrac{j\omega\mu\, a}{\xi'_{[1,1]}}\mathcal{J}'_1\left(\dfrac{\xi'_{[1,1]}}{a}r\right)\cos(\vartheta+\varphi) \\ e_z(r,\vartheta) = 0 \\ h_r(r,\vartheta) = -\mathrm{C}\dfrac{j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\, a^2 - \left(\xi'_{[1,1]}\right)^2}}{\xi'_{[1,1]}}\mathcal{J}'_1\left(\dfrac{\xi'_{[1,1]}}{a}r\right)\cos(\vartheta+\varphi) \\ h_\vartheta(r,\vartheta) = -C\dfrac{ja\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\, a^2 - \left(\xi'_{[1,1]}\right)^2}}{\left(\xi'_{[1,1]}\right)^2}\dfrac{\mathcal{J}_1\left(\dfrac{\xi'_{[1,1]}}{a}r\right)}{r}\ \sin(\vartheta+\varphi) \\ h_z(r,\vartheta) = C\mathcal{J}_1\left(\dfrac{\xi'_{[1,1]}}{a}r\right)\cos(\vartheta+\varphi) \end{cases}$$

Dalle espressioni precedenti può dedursi l'andamento qualitativo delle linee di forza del campo *e.m.* $\mathrm{TE}_{[1,1]}$; questo è rappresentato, per $\varphi = 0$, per $\varphi = \overline{\varphi}$ (generico) in fig. 7.11.

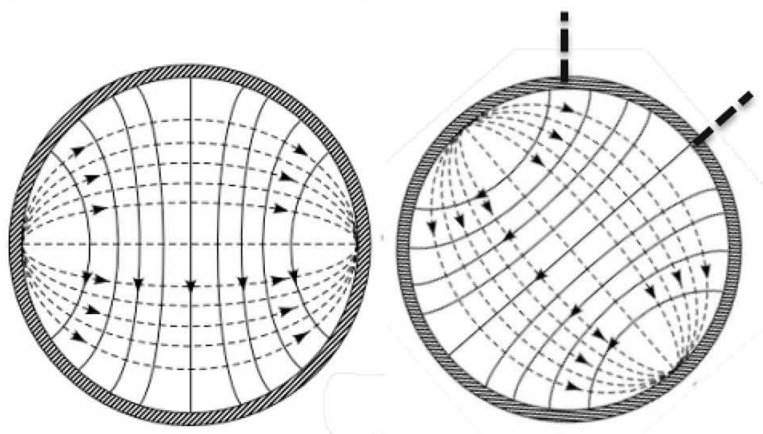


Figura 7.11 – Campo ***e.m.*** *del modo* $TE_{[1,1]}$

Come già accennato, l'orientamento delle linee di forza del campo *e.m.* è direttamente individuato dal valore di φ, generalmente determinato dalle condizioni di eccitazione iniziale; la polarizzazione dell'onda è pertanto indipendente dalla struttura (ciò è giustificabile intuitivamente in quanto la simmetria radiale della sezione della guida non presenta direzioni privilegiate). Poiché nella guida possono propagarsi onde comunque polarizzate, alcune alterazioni (deformazioni, imperfezioni varie, etc.) in pratica vanno a modificare, se rilevanti, la polarizzazione del campo generalmente ciò comporta perdite d'informazione. Per avviare a questo tipo di inconvenienti si è pensato di utilizzare, fra l'altro, guide a sezione ellittica, i cui assi definiscono direzioni privilegiate per le linee di forza.

7.2.4 Modi circolari elettrici, modi degeneri $TE_{[0,m]}$

Per le proprietà che andremo ad esaminare, la classe dei modi $TE_{[0,m]}$ risulta particolarmente interessante. Dall'espressione generale dei ***TE*** espressa delle equazioni [7.50], per $n = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} e_r(r,\vartheta) \equiv 0 \\ e_\vartheta(r,\vartheta) = -C\dfrac{j\omega\mu}{K_{t[0,m]}^2}\dfrac{\xi'_{0,m}}{a}\mathcal{J}'_0\left(\dfrac{\xi'_{[0,m]}}{a}r\right)\cos(\varphi) \\ e_z(r,\vartheta) = 0 \\ h_r(r,\vartheta) = C\dfrac{K_{z[0,m]}}{K_{t[0,m]}^2}\dfrac{\xi'_{0,m}}{a}\mathcal{J}'_0\left(\dfrac{\xi'_{[0,m]}}{a}r\right)\cos(\varphi) \\ h_\vartheta(r,\vartheta) = 0 \\ h_z(r,\vartheta) = C\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\xi'_{[0,m]}}{a}r\right)\cos(\varphi) \end{cases}$$

I modi $TE_{[0,m]}$ sono detti "*modi circolari elettrici*" in quanto il campo elettrico, che (come quello magnetico) dipende qui solo da r, è puramente circonferenziale.

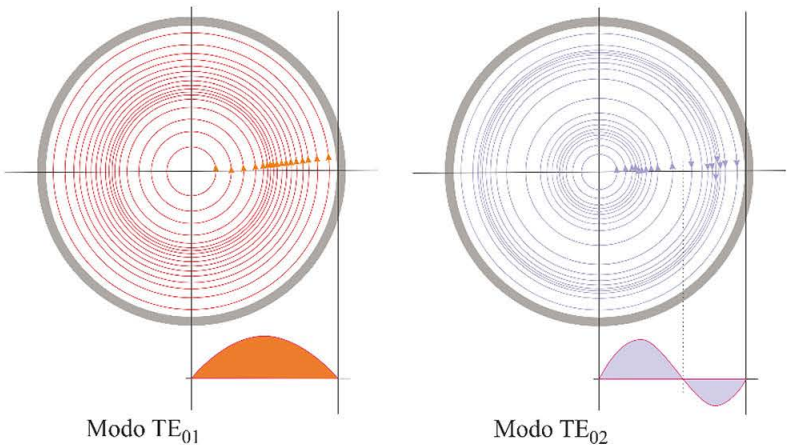


Figura 7.12 – Linee di forza del campo elettrico dei modi $TE_{[0,1]}, TE_{[0,2]}$

Di fondamentale importanza pratica è l'analisi dell'attenuazione per tali modi.

Con riferimento a quanto già detto (in particolare cfr.§6.8) essendo sempre nulla la componente circonferenziale del campo magnetico $\left(\Longrightarrow h_{t\tau} = \underline{h}_t \cdot \underline{s}_0 = h_r(r)\,\underline{r}_0 \cdot \underline{\vartheta}_0 = 0\right)$, il mantello metallico della guida circolare è in questo caso percorso soltanto da correnti circonferenziale (legate ad h_z).

Le perdite energetiche per i modi $\mathrm{TE}_{[0,m]}$, dovute alle dissipazioni per effetto *Joule* di queste correnti, possono essere valutate attraverso la costante di attenuazione per unità di lunghezza $\alpha_z(\omega)$: secondo la notazione già adottata si ha: $\alpha_{z[0,m]}(\omega) = C(\omega)$.

L'annullamento del termine $L(\omega)$ (cfr.§6.8.2) è ovviamente deducibile per via analitica; si ha infatti:

$$\frac{\partial h_z(r)}{\partial s} = \frac{1}{a}\frac{\partial h_z(r)}{\partial \vartheta} = 0, \quad ds = a\, d\vartheta$$

Che implica l'annullarsi del numeratore di $L(\omega)$; avendo escluso, fra le possibili autosoluzioni h_z quelle costanti, il denominatore risulta sempre positivo, ne segue per i $\mathrm{TE}_{[0,m]}$: $L(\omega) = 0$.

Vedremo in seguito l'espressione di $\alpha_{z[0,m]}$.

Riferendoci alla fig. 5.17 del §6.8.2 (per comodità nella fig.7.13 riportata a fianco) si nota che i modi circolari elettrici presentano un'attenuazione sempre minore all'aumentare della frequenza (tendendo a zero con ordine (3/2), per $\omega \to \infty$).

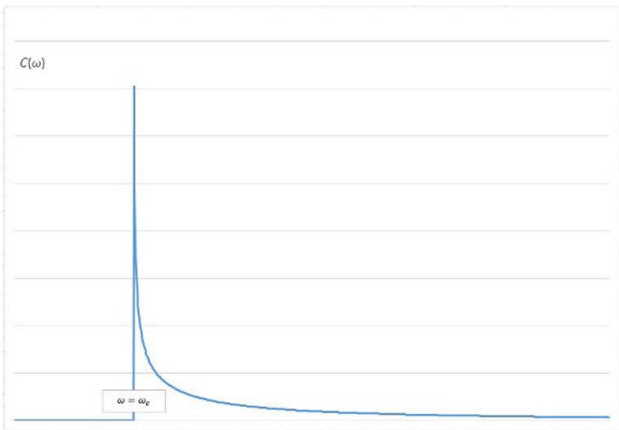


Figura 7.13 – Andamento $C(\omega)$

La bassa attenuazione alle alte frequenze $\mathrm{TE}_{[0,m]}$ (rispetto ai generici $\mathrm{TE}_{[n,m]}$), ha suggerito l'uso dei modi circolari per collegamenti a grande distanza.

Questo tipo di trasmissione comporta però quegli inconvenienti di carattere tecnico che generalmente si manifestano quando si lavora con frequenze maggiori di quelle della banda unimodale.

Si può avere infatti che la potenza associata al modo di interesse (ad es. il $\mathrm{TE}_{[0,1]}$) venga distribuita, per cause indesiderate (imperfezioni della guida, etc.), ad altri d'ordine inferiore (in questo caso: il $\mathrm{TE}_{[2,1]}$,il $\mathrm{TM}_{(0,1)}$ e il dominante $\mathrm{TE}_{[1,1]}$). L'effetto di tale conversione modale causa in genere perdita di potenza del modo che si vuole trasmettere; il segnale risulta inoltre distorto, qualora i modi "*parassiti*" (che, come il $\mathrm{TE}_{[2,1]}, \mathrm{TM}_{(0,1)}, \mathrm{TE}_{[1,1]}$ viaggiano a velocità diverse) si riconvertono in quello

originariamente eccitato. Per evitare quest'ultimo fenomeno si opera tecnicamente in maniera tale da rendere massima l'attenuazione per i modi "*parassiti*" (guide "*ad elica*", etc.[30])

7.2.5 *Modi Degeneri*

Dalla proprietà delle ***F.d.B.***: $\mathcal{J}_0'(x) = -\mathcal{J}_1(x)$, si ha che gli zeri della derivata della ***F.d.B.*** di ordine uno:

$$\xi'_{0,m} = \xi_{0,m}; \qquad m = 1,2,3,\dots$$

Ricordando l'espressione degli autovalori per i campi ***TE*** e ***TM*** otteniamo:

$$K^2_{t[0,m]} = K^2_{t(1,m)} \qquad \Longrightarrow \qquad K_{z[0,m]} = K_{z(1,m)}$$

I modi circolari elettrici $\mathrm{TE}_{[0,m]}$ e i $\mathrm{TM}_{(1,m)}$ sono pertanto degeneri.

7.2.6 *Attenuazione, potenza per i modi* $TE_{[0,m]}$

Si vuole ora particolarizzare l'espressione della costante di attenuazione per unità di lunghezza $\alpha_z(\omega)$ relativamente ai modi circolari elettrici $\mathrm{TE}_{[0,m]}$. Come visto nel §6.8, per essi vale:

$$\alpha_{z[0,m]}(\omega) = C(\omega) = \frac{K^4_{t[0,m]}}{2\mu\sqrt{2g\varepsilon}} \frac{\oint_S h_z^2\, ds}{\int_S |\nabla_t h_z|^2\, dS} \frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \qquad [7.65]$$

Dove:

$$K^4_{t[0,m]} = \frac{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^4}{a^4}; \;\; \omega^2_{c[0,m]} = c^2 \frac{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}{a^2}; \;\; h_z(r) = C\, cos\varphi\, \mathcal{J}_0\left(\frac{\xi'_{[0,m]}}{a} r\right)$$

Calcoliamo separatamente gli integrali a nominatore e denominatore della [7.65]

$$\oint_S h_z^2\, ds = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left[C\ cos(\varphi)\, \mathcal{J}_0\left(\frac{\xi'_{[0,m]}}{a} r\right)\right]^2_{r=a} a\, d\vartheta = 2\pi a\, C^2 cos^2(\varphi)\, \mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right) \qquad [7.66]$$

Dove il contorno s è definito da $r = a, 0 \le \vartheta \le 2\pi; \rightarrow ds = a\, d\vartheta$

Per l'integrale a denominatore si ha invece:

[30] Collin: Op.cit., pag. 112-113 e relativa bibliografia

$$\int_S |\nabla_t h_z|^2 \, dS = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} C \frac{\xi'_{[0,m]}}{a} \mathcal{J}'_0\left(\frac{\xi'_{[0,m]}}{a} r\right) \cos(\varphi)\, r \, dr \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \frac{\xi'_{[0,m]}}{a} C^2 cos^2(\varphi) \int_{r=0}^{r=a} \left[\mathcal{J}'_0\left(\frac{\xi'_{[0,m]}}{a} r\right)\right]^2 r \, dr$$

Con opportune sostituzioni quest'ultimo integrale può essere ricondotto ad un tipo noto; ricordando la proprietà:

$$\mathcal{J}'_0(x) = -\mathcal{J}_1(x)$$

E ponendo

$$\frac{r}{a} = x; \rightarrow dr = a \, dx$$

Abbiamo infatti:

$$\int_{r=0}^{r=a} \left[\mathcal{J}'_0\left(\frac{\xi'_{[0,m]}}{a} r\right)\right]^2 r \, dr = a^2 \int_{x=0}^{x=1} \mathcal{J}_1^2\left(\xi'_{[0,m]} x\right) x \, dx$$

L'integrale cui si è giunti (noto come *integrale di Lommel*) assume il valore[31]:

$$a^2 \int_{x=0}^{x=1} \mathcal{J}_1^2\left(\xi'_{[0,m]} x\right) x \, dx = \frac{a^2}{2} \left\{ \left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 + \left[1 - \frac{1}{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}\right] \mathcal{J}_1^2\left(\xi'_{[0,m]}\right) \right\}$$

Dove è stata utilizzata nuovamente la relazione $\mathcal{J}'_0(x) = -\mathcal{J}_1(x)$, l'espressione tra parentesi graffe può essere semplificata:

$$\left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 + \left[1 - \frac{1}{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}\right] \mathcal{J}_1^2\left(\xi'_{[0,m]}\right) = \left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 + \left[1 - \frac{1}{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}\right] \left[\mathcal{J}'_0\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2$$

$$= \left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2$$

Dove è stato assunto che $\left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 = 0$ visto che $\xi'_{[0,m]}$ rappresentano proprio gli zeri della funzione $\mathcal{J}'_1(x)$.

In base alla formula di ricorrenza[32] si ottiene:

---

[31] A. Ghizzetti, F. Mazzarella, A. Ossicini: "*Lezioni di complementi di matematica*" pagg 466 e seguenti (in particolare formula 6.14.6)

[32] A. Ghizzetti, F. Mazzarella, A. Ossicini: "*Lezioni di complementi di matematica*" pagg 431 (formula 6.9.4)

$$\xi'_{[0,m]}\,\mathcal{J}_0\left(\xi'_{[0,m]}\right) = \mathcal{J}_1\left(\xi'_{[0,m]}\right) + \xi'_{[0,m]}\,\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)$$

Per cui:

$$\left[\mathcal{J}'_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 = \left[\mathcal{J}_0\left(\xi'_{[0,m]}\right) - \frac{1}{\xi'_{[0,m]}}\mathcal{J}_1\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 = \left[\mathcal{J}_0\left(\xi'_{[0,m]}\right) + \frac{1}{\xi'_{[0,m]}}\mathcal{J}'_0\left(\xi'_{[0,m]}\right)\right]^2 = \mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right)$$

Dove è stato assunto che $\mathcal{J}'_0\left(\xi'_{[0,m]}\right) = 0$ visto che $\xi'_{[0,m]}$ rappresentano proprio gli zeri della funzione $\mathcal{J}'_0(x)$.

Quindi, l'integrale a denominatore della [7.65] diviene:

$$\int_S |\nabla_t h_z|^2 \; dS = \pi\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2 C^2 cos^2(\varphi)\,\mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right) \qquad [7.67]$$

In definitiva per la [7.65], utilizzando le forme [7.66] e [7.67] si ricava:

$$\alpha_{z[0,m]}(\omega) = \frac{\frac{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^4}{a^4}}{2\mu\sqrt{2g\varepsilon}} \frac{2\pi a\, C^2 cos^2(\varphi)\,\mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right)}{\pi\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2 C^2 cos^2(\varphi)\,\mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right)} \frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\mu\sqrt{2g\varepsilon}} \frac{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}{a^3} \frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\omega^2 - c^2\frac{\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}{a^2}}} \qquad [7.68]^{33}$$

Attraverso procedimenti analoghi, quantunque più laboriosi, si può giungere all'espressione generale della costante di attenuazione per i modi ***TE*** e ***TM*** in guida circolare.

Con riferimento alle formule riportate in *Collin*[34] possiamo scrivere:

a) Modi ***TE***:

$$\alpha_{z[n,m]}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2g\mu}} \frac{1}{a^3\left[\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2 - n^2\right]} \frac{a^2 n^2 \beta_{z[n,m]}^2 + \left(\xi'_{[n,m]}\right)^4}{\sqrt{\omega}\,\beta_{z[n,m]}} \qquad [7.69]$$

Dove

[33] Collin: Op.cit., pag. 111, espressione (3.123), dove $R_m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$,...

[34] Collin: Op.cit., Tab. 3.4

$$\beta_{z[n,m]} = -\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_{c[n,m]}^2}, \qquad per\ \omega \geq \omega_{c[n,m]} = \frac{\xi'_{[n,m]}}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Dall'espressione di $\alpha_{z[n,m]}$può ancora dedursi il tipico andamento in funzione della frequenza, secondo i termini $L(\omega)$ e $C(\omega)$ come già schematizzato al §6.8. Si vede facilmente poi, che ponendo nella [7.69] $n = 0$, si ricava la [7.68] precedentemente trovata per l'attenuazione dei modi circolari elettrici.

b) Modi ***TM***:

$$\alpha_{z(n,m)}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{2g}}\frac{\varepsilon}{a}\frac{\omega\sqrt{\omega}}{\beta_{z(n,m)}} \qquad [7.70]$$

Dove

$$\beta_{z(n,m)} = -\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_{c(n,m)}^2}, \qquad per\ \omega \geq \omega_{c(n,m)} = \frac{\xi_{(n,m)}}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Si possono ancora trovare i risultati in accordo con quanto riportato al §6.9.

Com'è noto, alla propagazione di un generico modo in guida ideale ($g = \infty, \varepsilon = \varepsilon_c, K_z = j\beta_z$) è associata la potenza (parte reale del flusso del vettore di *Poynting* su S):

$$P = \frac{P_2 P_2^*}{2} Re(Z_w) \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \, dS$$

Per il calcolo di P in guida circolare di raggio a, essendo $\underline{h}_t = h_r \underline{r}_0 + h_\vartheta \underline{\vartheta}_0$, avremo:

$$P = \frac{P_2 P_2^*}{2} Re(Z_w) \int_{r=0}^{a} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \left(h_r^2 + h_\vartheta^2\right) r \, dr \, d\vartheta$$

Dove h_r e h_ϑ sono fornite dalle relazioni già trovate per i modi ***TE*** [7.50] e ***TM*** [7.60].

Il calcolo dell'integrale è generalmente piuttosto elaborato: sempre con riferimento a *Collin*[35] riportiamo qui solo le espressioni finali della potenza, avendo normalizzato le costanti di ampiezza che compaiono nelle componenti dei campi in questione ($C = 1, P_2 = 1, \varphi = 0, etc.$)

[35] Collin: Op.cit., Tab. 3.4

a) Modi circolari elettrici $\mathrm{TE}_{[0,m]}$:

$$P_{[0,m]} = \frac{\pi\mu a^4}{4\left(\xi'_{[0,m]}\right)^2}\,\mathcal{J}_0^2\left(\xi'_{[0,m]}\right)\omega\beta_{z[0,m]} \qquad [7.80]$$

b) Modi $\mathrm{TE}_{[n,m]}(n \neq 0)$:

$$P_{[n,m]} = \frac{\pi\mu\left[\left(\xi'_{[n,m]}\right)^2 - n^2\right]a^4}{2\left(\xi'_{[n,m]}\right)^4}\,\mathcal{J}_n^2\left(\xi'_{[n,m]}\right)\omega\beta_{z[n,m]} \qquad [7.81]$$

c) Modi $\mathrm{TM}_{(n,m)}$:

$$P_{(n,m)} = \frac{\pi\varepsilon a^4}{4\left(\xi_{(n,m)}\right)^2}\left[\mathcal{J}'_n\left(\xi_{(n,m)}\right)\right]^2\omega\beta_{z(n,m)}\,\epsilon_{0n} \qquad [7.82]$$

Dove ϵ_{0n} si è indicato il fattore di *Neumann* che vale

$$\epsilon_{0n} = \begin{cases} 1 & per\ n = 0 \\ 2 & per\ n > 0 \end{cases}$$

8 STRUTTURE GUIDANTI A DUE O PIÙ CONDUTTORI

Vogliamo ora esaminare l'importante classe di strutture guidanti a simmetria cilindrica costituite da due o più conduttori. Nella letteratura anglosassone esse vengono identificate con il nome "*transmission line*", in tale contesto non useremo l'analogo termine italiano "*linee di trasmissione*" che ha un significato di carattere più generale (essendo, come noto, riferito al formalismo dei circuiti equivalenti).

Esse possono essere suddivise in strutture dal contorno metallico aperto (per le quali il campo *e.m.* invade tutto lo spazio (cfr. fig. 7.14 a), b) c)) o chiuso (nelle quali il campo *e.m.* rimane confinato all'interno del mantello esterno, ad es. d), e)).

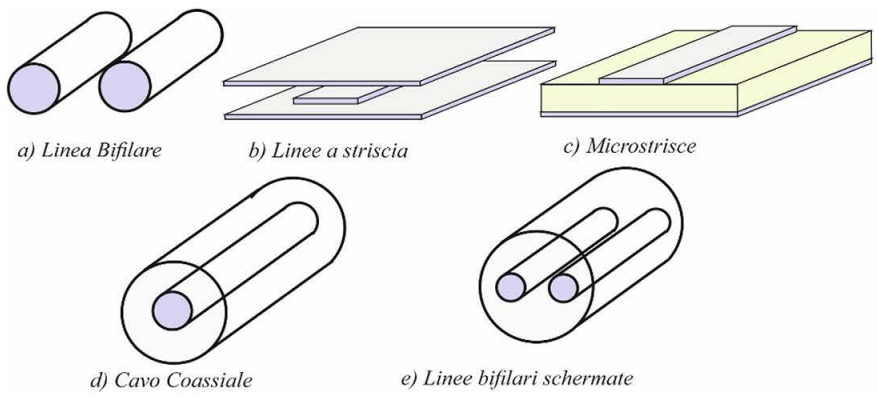


Figura 7.14 – Alcune tipologie di strutture guidanti a due o più conduttori.

Le strutture guidanti ideali a più conduttori con mezzo trasmissivo omogeneo e isotropo sono caratterizzate dalla fondamentale proprietà di poter trasmettere onde ***TEM*** (oltre a quelle ***TE*** e ***TM***).

Per le microstrisce, costituite da dielettrico non omogeneo (essendo in gioco due tipologie di mezzo trasmissivo), non è possibile, come sarà più chiaro in seguito, avere una propagazione ***TEM*** (che risulterà comunque ad essi riconducibile con opportune approssimazioni).

Poiché i modi ***TEM*** sono largamente utilizzati in pratica, conviene considerare alcune peculiarità. Ricordiamo intanto alcune delle proprietà generale viste nei paragrafi precedenti.

Un campo ***TEM*** propagantesi in una struttura guidante ideale (metallo con $g = \infty$) con dielettrico non dispersivo omogeneo e isotropo, a simmetria cilindrica (sistema di riferimento q_1, q_2, z), ha per definizione nulle le componenti longitudinali di $\underline{E}$ e $\underline{H}$ ($E_z = H_z = 0$).

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t = \underline{e}_t(q_1, q_2)\, Z_e(z) \\ \underline{H} = \underline{H}_t = \underline{h}_t(q_1, q_2)\, Z_h(z) \end{cases} \qquad [7.90]$$

Dove $Z_e(z)$ e $Z_h(z)$, relative alla propagazione dell'onda, sono legate dalle relazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_e(z)}{dz} = -K_z\, Z_h(z) \\ \dfrac{dZ_h(z)}{dz} = -K_z\, Z_e(z) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_e(z) = P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1\, e^{K_z z} + P_2\, e^{-K_z z} \end{cases} \qquad [7.91]$$

Essendo in questo caso: $K_z^2 = -\omega^2 \mu\, \varepsilon_c = K^2$, ovvero $K_t^2 = 0$.

Se il dielettrico è anche non dissipativo $g = 0,\ \varepsilon = \varepsilon_c$ abbiamo:

$$K_z^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon \quad \Rightarrow \quad K_z = \alpha_z + j\beta_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_z = 0 \\ \beta_z = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \dfrac{\omega}{c} \end{cases} \qquad [7.92]$$

Un modo ***TEM*** può allora propagarsi senza attenuazione e qualsiasi frequenza (il caso $\omega = 0$ rappresentando un campo elettrostatico): esso risulta il dominante, avendo i campi ***TE*** e ***TM*** frequenza di taglio non nulla. (per questi è infatti $K_t^2 < 0 \implies \omega_c > 0$).

La banda di regime unimodale è delimitata pertanto dalla f_c del primo modo d'ordine superiore (che, come può dimostrarsi, risulta sempre un ***TE***).

Dalla dipendenza lineare con la frequenza della costante di fase dell'onda ***TEM***, consegue che le relative velocità di fase, dell'energia e di gruppo coincidono tra loro, risultando indipendenti da ω, e pari alla velocità della luce nel mezzo (c).

$$u_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c\,; \quad u_w = \frac{\beta_z}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c\,;\ u_g = \frac{1}{\dfrac{d\beta_z}{d\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c \qquad [7.93]$$

La struttura nel solo caso in cui si propaghi un campo ***TEM***, può essere quindi considerata come un "*sistema non dispersivo*" (un segnale ***TEM*** è teoricamente trasmissibile "*senza dispersione*").

In realtà la presenza di dissipatori energetiche modifica le considerazioni teoriche: infatti, come già avveniva per onde ***TE*** e ***TM***, le correnti che si generano sui mantelli metallici implicano generalmente l'esistenza di componenti assiali dei campi *e.m.*, per cui non si ha un vero e proprio modo ***TEM***, piuttosto un "*modo ibrido*".

Per quanto riguarda il problema *e.m.* sulla generica sezione trasversale, si ha che $\underline{e}_t(q_1,q_2)$ e $\underline{h}_t(q_1,q_2)$ sono tra loro ortogonali, essendo legati dalla:

$$\underline{e}_t(q_1,q_2) = Z_{TEM}\,\underline{h}_t(q_1,q_2) \times \underline{z}_0$$

Con $Z_{TEM} = \sqrt{\mu/\varepsilon_c}$ impedenza d'onda. Essa risulta indipendente dalla frequenza e dalla forma della struttura, coincidendo con l'impedenza caratteristica del mezzo in cui si ha propagazione.

Lo studio di $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ è di notevole importanza, in quanto la loro configurazione coincide con quella dell'onda ***TEM*** diretta, si ha infatti per l'onda incidente: $\left(P_1 = 0 \Longrightarrow\ Z_e(z) = Z_h(z) = P_2\, e^{-j\,K_z\,z}\right)$.

$$\underline{E}_t^{(+)} = Z_{TEM}\,\underline{H}_t^{(+)} \times \underline{z}_0$$

Mentre per l'onda riflessa $\left(P_2 = 0 \Longrightarrow\ Z_e(z) = -Z_h(z) = P_1\, e^{j\,K_z\,z}\right)$

$$\underline{E}_t^{(-)} = -Z_{TEM}\,\underline{H}_t^{(-)} \times \underline{z}_0$$

Come è noto, $\underline{e}_t(q_1,q_2)$ risulta irrotazionale $\left(\nabla_t \times \underline{e}_t = 0\right)$ e solenoidale $\left(\nabla_t \cdot \underline{e}_t = 0\right)$ in regioni prive di sorgenti, potendosi collegare a un potenziale scalare $\Phi(q_1,q_2)$ mediante la:

$$\underline{e}_t(q_1,q_2) = -\nabla_t \Phi(q_1,q_2)$$

Dove $\Phi(q_1,q_2)$ deve soddisfare l'equazione di *Laplace* $\nabla_t^2 \Phi(q_1,q_2)$ in ogni punto della sezione esterna s esterna ai conduttori, risultando costante sul bordo di ognuno di essi.

Il problema della determinazione della $\Phi(q_1,q_2)$ è stato analizzato, sotto ipotesi opportune, da *Dirichlet*[36].

Come già dimostrato, soluzioni $\Phi(q_1,q_2)$ non costanti possono aversi solo in campi non semplicemente connessi (cui corrispondono strutture guidanti costituite da più conduttori disgiunti).

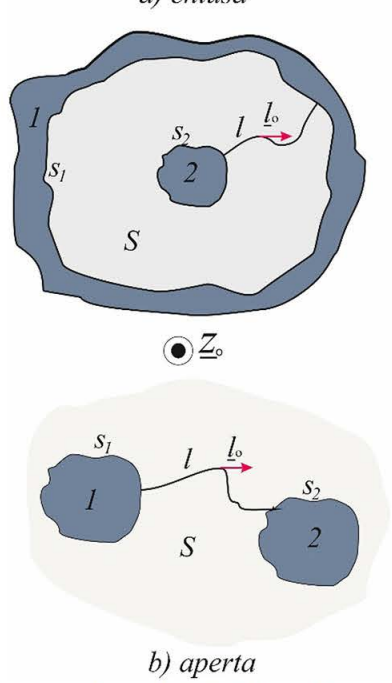


Figura 7.15 – Strutture a due conduttori a) chiusa, b) aperta.

[36] Cfr.: Ghizzetti-Rosati: "*Lezioni di analisi matematica*", vol. 2, ed Veschi, §29.4, §29.5.

Analizziamo per semplicità linee guidanti costituite da due conduttori ideali con dielettrico omogeneo, isotropo e privo di perdite (quanto segue potrà essere opportunamente esteso al caso di tre o più conduttori).

In fig. 7.15 sono schematizzate le sezioni trasversali dei due possibili tipi di guida (chiuso: dominio S limitato; aperta: S illimitato).

Con riferimento alle notazioni di fig. 7.15, le condizioni al contorno sono: $\Phi = \varphi_1$ sul bordo s_1 del conduttore 1 e $\Phi = \varphi_2$ sul bordo s_2 del conduttore 2; come è noto, per esistenza di campi ***TEM*** deve imporsi $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

L'integrale di linea di $\underline{e}_t$ sul piano trasverso fra un generico punto P_1 su s_1 e uno P_2 su s_2, lungo un qualsiasi percorso orientato $l \in S$ (con versore $\underline{l}_0$), è dato da:

$$\int_{l(P_1,P_2)} \underline{e}_t \cdot \underline{l}_0 \, dl = \int_{l(P_1,P_2)} -\nabla_t \Phi \cdot \underline{l}_0 \, dl = \int_{l(P_1,P_2)} -\frac{\partial \Phi}{\partial l} \, dl = -[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)] = \varphi_1 - \varphi_2 = V_0$$

Esso è indipendente dal percorso scelto, coincidendo col valore $V_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ (che ovviamente non varia, comunque si prendono i punti P_1, P_2).

Più in generale si ha per due punti qualsiasi $A, B \in S$:

$$\int_{l(A,B)} \underline{e}_t \cdot \underline{l}_0 \, dl = [\Phi(A) - \Phi(B)]$$

Per cui la circuitazione di $\underline{e}_t$ risulta nulla ($\underline{e}_t$ conservativo)[37].

Proprietà analoghe possono dedursi per il campo elettrico $\underline{E}_t$:

$$\int_{l(P_1,P_2)} \underline{E} \cdot \underline{l}_0 \, dl = \int_{l(P_1,P_2)} \underline{E}_t \cdot \underline{l}_0 \, dl = Z_e(z) \int_{l(P_1,P_2)} \underline{e}_t \cdot \underline{l}_0 \, dl = Z_e(z) \, V_0 = V(z), \qquad [V]$$

Si può dunque definire *un'onda potenziale* $V(z)$; avendosi per il campo diretto $\underline{E}_t^{(+)}$ e riflesso $\underline{E}_t^{(-)}$ rispettivamente:

$$\int_{l(P_1,P_2)} \underline{E}_t^{(+)} \cdot \underline{l}_0 \, dl = P_2 \, e^{-j K_z z} \, V_0 = V^{(+)}(z)$$

[37] Cfr.: Barzilai "*Fondamenti di elettromagnetismo*", ed Siderea, 3 edizione pag. 75, 76, 77.

$$\int_{l(P_1,P_2)} \underline{E_t}^{(-)} \cdot \underline{l}_0 \, dl = P_1 \, e^{j K_z z} \, V_0 = V^{(-)}(z)$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$V(z) = V^{(+)}(z) + V^{(-)}(z)$$

(Questo tipo di notazione sarà spesso utilizzato nel formalismo delle linee di trasmissione).

Consideriamo ora il campo magnetico: la sua circuitazione sul piano trasversale lungo una linea s (di versore $\underline{s}_0$ come in fig. 7.16) circondante il conduttore, diviene per il teorema di *Stokes*:

$$\oint_s \underline{H} \cdot \underline{s}_0 \, ds = \oint_s \underline{H_t} \cdot \underline{s}_0 \, ds = \int_{S'} \nabla \times \underline{H_t} \cdot \underline{z}_0 \, dS$$

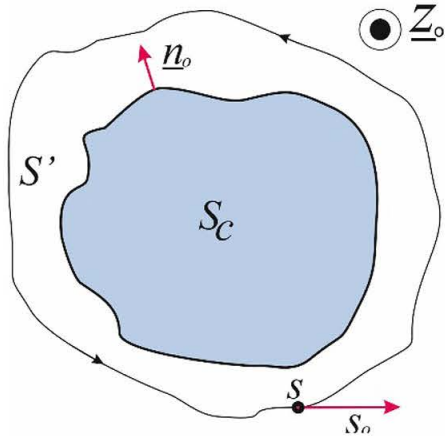


Figura 7.16 – Circuitazione campo magnetico.

Dove S' è la superficie piana (orientata secondo la convenzione per cui si vede s *percorsa in senso antiorario*) delimitata dalla curva s.

Dalla quarta equazione di *Maxwell* abbiamo:

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} + \underline{J} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \underline{H_t} = j\omega\varepsilon \underline{E_t} + \underline{J}$$

Si ricava:

$$\oint_s \underline{H_t} \cdot \underline{s}_0 \, ds = \int_{S'} j\omega\varepsilon \underline{E_t} \cdot \underline{z}_0 \, dS + \int_{S'} \underline{J} \cdot \underline{z}_0 \, dS$$

In cui il primo integrale a secondo membro è nullo $(\underline{E_t} \perp \underline{z}_0)$.

La densità di corrente è presente solo sulla prima superficie esterna s_c del conduttore, che si è ipotizzato reale: si ha infatti la nota condizione di continuità ($\underline{n}_0$ uscente dalla superficie del metallo):

$$\underline{n}_0 \times \underline{H_t} = \underline{J_s} = J_s \, \underline{z}_0 \quad \text{su } s_c$$

La densità superficiale di corrente $\underline{J_s}$, $[A\,m^{-1}]$ è diretta assialmente; si ha quindi:

$$\int_{S'} \underline{J} \cdot \underline{z}_0 \, dS = \oint_{s_c} \underline{J_s} \cdot \underline{z}_0 \, ds = \oint_{s_c} J_s \, ds$$

La circuitazione di $\underline{H_t}$ diviene allora:

$$\oint_s \underline{H_t} \cdot \underline{s}_0 \, ds = \oint_{s_c} J_s \, ds = I, \qquad [A]$$

Dove con I si è indicata la corrente che percorre la superficie esterna del conduttore in direzione longitudinale: essa è considerata positiva se $\underline{J_s}$ è concorde con $\underline{z}_0$ ($J_s > 0$), negativa se discordante ($J_s < 0$). L'espressione trovata rappresenta la legge di *Ampere*.

$\underline{J_s}$ e I risultano dipendenti dalla coordinata z secondo la stessa legge di variazione $Z_h(z)$ del campo magnetico; è infatti:

$$\oint_s \underline{H_t} \cdot \underline{s}_0 \, ds = Z_h(z) \oint_s \underline{h_t}(q_1, q_2) \cdot \underline{s}_0 \, ds = \oint_{s_c} \underline{J_s}(q_1, q_2, z) \cdot \underline{z}_0 \, ds = I(z)$$

E pertanto:

$$\underline{J_s}(q_1, q_2, z) = Z_h(z) \, \underline{j_s}(q_1, q_2); \qquad I(z) = Z_h(z) \, I_o$$

Con I_o costante.

In tal modo, il problema in funzione delle sole coordinate trasversali diventa, essendo: $\underline{n}_0 \times \underline{h_t} = \underline{j_s} = j_s \, \underline{z}_0$ su s_c.

$$\oint_s \underline{h_t}(q_1, q_2) \cdot \underline{s}_0 \, ds = \oint_{s_c} \underline{j_s}(q_1, q_2) \cdot \underline{z}_0 \, ds = \oint_{s_c} j_s(q_1, q_2) \, ds = I_0$$

Analogamente a quanto visto per $V(z)$, si definisce un'onda di corrente $I(z)$, per la quale si ha:

$$\oint_s \underline{H_t}^{(+)} \cdot \underline{s}_0 \, ds = P_2 \, e^{-j K_z z} \, I_0 = I^{(+)}(z)$$

$$\oint_s \underline{H_t}^{(-)} \cdot \underline{s}_0 \, ds = -P_1 \, e^{j K_z z} \, I_0 = -I^{(-)}(z)$$

$$I(z) = I^{(+)}(z) - I^{(-)}(z)$$

È possibile fornire un'espressione quantitativa per I_0 in funzione di alcune grandezze elettriche fondamentali (sempre di tipo complesso).

La generica condizione di continuità per lo spostamento elettrico $\underline{n}_0 \cdot (\underline{D_2} - \underline{D_1}) = \sigma$, diviene sull'interfaccia metallo-dielettrico in esame:

$$\underline{n}_0 \cdot \underline{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{n}_0 \cdot \underline{E_t} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \text{su } s_c$$

Dove la densità superficiale di carica $\sigma\ [C\ m^{-2}]$, presente sul mantello conduttore, dipende da z come $\underline{E}_t$: $\sigma(q_1, q_2, z) = Z_e(z)\ \sigma_o(q_1, q_2)$; per cui sulla generica s_c abbiamo:

$$\underline{n}_0 \cdot \underline{e}_t(q_1, q_2) = \frac{\sigma_o(q_1, q_2)}{\varepsilon} \qquad \text{su } s_c$$

Si ha dunque, per $\underline{j}_s(q_1, q_2)$:

$$\underline{j}_s(q_1, q_2) = \underline{n}_0 \times \underline{h}_t = \underline{n}_0 \times \left[\frac{1}{Z_{TEM}} \underline{z}_0 \times \underline{e}_t\right] = \frac{1}{Z_{TEM}} \left[\underline{z}_0 \left(\underline{n}_0 \cdot \underline{e}_t\right) - \underline{e}_t \left(\underline{n}_0 \cdot \underline{z}_0\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\sigma_o(q_1, q_2)}{\varepsilon} \underline{z}_0 = \frac{\sigma_o(q_1, q_2)}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \underline{z}_0 = c\ \sigma_o(q_1, q_2)\ \underline{z}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad j_s(q_1, q_2)$$

$$= c\ \sigma_o(q_1, q_2)$$

Si potrà osservare che $\underline{j}_s(q_1, q_2)$ è concorde con $\underline{z}_0$ per distribuzioni di carica positive.

Segue per I_0:

$$I_0 = \oint_{s_c} j_s(q_1, q_2)\ ds = \oint_{s_c} c\ \sigma_o(q_1, q_2)\ ds = c\ q_l(q_1, q_2)$$

Avendo indicato con $q_l(q_1, q_2)\ [C\ m^{-1}]$, la carica elettrica per unità di lunghezza presente sulla superficie del conduttore.

Per il fenomeno dell'induzione elettrostatica è immediatamente deducibile che, in un sistema costituito da due conduttori, la $q_l(q_1, q_2)$ sull'uno ha valore opposto di quella sull'altro $\left(-q_l(q_1, q_2)\right)$: in base all'espressione trovata è allora osservabile che i due conduttori sono percorsi rispettivamente da $I(z)$ e $-I(z)$, aventi stessa intensità ma verso contrario.

Riassumendo, il problema della determinazione del campo *e.m.* per un ***TEM*** è riconducibile ad un semplice problema di tipo statico, risultando $\Phi, \underline{e}_t, \underline{h}_t$ indipendenti da ω.

La componente $\underline{e}_t$ è infatti quella generata da due conduttori, aventi differenza di potenziale elettrostatico $V_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ (coincidendo $\Phi(q_1, q_2)$, autosoluzione dell'equazione di *Laplace*, proprio con la funzione potenziale elettrostatica (*e.s.*) $V(q_1, q_2)$, che può essere ricavata da considerazioni geometriche sulla struttura.

La componente $\underline{h}_t$ è generata dalle correnti stazionarie $\pm I_0 = \pm c\, q_l(q_1, q_2)$ che percorrono in versi opposti le superfici metalliche (le linee di forza di essendo $\underline{h}_t$ equipotenziali).

Nella teoria delle linee di trasmissione è utile definire il rapporto:

$$Z_c = \frac{V^{(+)}(z)}{I^{(+)}(z)} = -\frac{V^{(-)}(z)}{I^{(-)}(z)}, \quad [\Omega] \tag{7.100}$$

Detta *impedenza caratteristica* della linea; per un campo ***TEM*** si ha:

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{c\, q_l(q_1, q_2)} \tag{7.101}$$

Definendo una capacità *e.s.* C_l per unità di lunghezza tra i conduttori (rapporto tra carica per unità di lunghezza q_l e differenza di potenziale V_0:

$$C_l(q_1, q_2) = \frac{q_l(q_1, q_2)}{V_0} \quad [F\, m^{-1}]$$

Si può porre:

$$Z_c = \frac{1}{c\, C_l(q_1, q_2)} = Z_{TEM} \frac{\varepsilon}{C_l(q_1, q_2)}$$

C_l e Z_c risultano pertanto determinati dalla geometria trasversale della struttura.

Sono state esaminate alcune delle principali proprietà dei campi ***TEM***, ottenute applicando le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo. Può essere utile accennare al comportamento un campo *e.m.* generico (con E_z e H_z non nulle), al fine di estendere le precedenti considerazioni; ciò non ha solo carattere speculativo: infatti, come si è avuto modo di osservare, non è possibile avere in pratica modi guidati propriamente del tipo ***TEM***, ***TE***, ***TM*** (a causa delle dissipazioni). Quanto segue potrà chiare, fra l'altro, quali sono i limiti per cui è ragionevole approssimare campi reali con quelli ideali.

Consideriamo nuovamente una struttura guidante a più conduttori (vedi fig. 7.14): il generico campo *e.m.* in essa propagantesi soddisfa le equazioni di *Maxwell*. Dalla terza di queste $\left(\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\, \underline{H}\right)$ utilizzando il teorema di *Stokes*, con l'ormai noto significato dei simboli:

$$\oint_s \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{z}_0\, ds = \oint_s \underline{E} \cdot \underline{s}_0\, ds = \int_S -j\omega\mu\, \underline{H} \cdot \underline{z}_0\, dS$$

Essendo S una qualsiasi superficie piana di contorno s (con i soliti orientamenti dei versori).

La precedente espressione (legge di *Faraday-Neumann-Lenz*) ricordando che $E_z\,\underline{z}_o \perp \underline{s}_0$ e $\underline{E}_t \perp \underline{z}_o, \underline{E}_t = Z_e\,\underline{e}_t$ e $H_z = Z_e\,h_z$ assume la forma:

$$\oint_s \underline{E}_t \cdot \underline{s}_0\,ds = -j\omega\mu \int_S H_z\,dS \qquad \Rightarrow \qquad \oint_s \underline{e}_t \cdot \underline{s}_0\,ds = -j\omega\mu \int_S h_z\,dS$$

È evidente che il campo elettrico trasversale è in genere non conservativo (a differenza del ***TEM*** ($H_z = 0$)), per la presenza di un flusso assiale di induzione magnetica variabile (generante una forza elettromotrice indotta): si ha conservatività (per $\omega > 0$) solo se $h_z = 0$ su S (campi ***TM*** e ***TEM***).

Analogamente, dalla quarta equazione di *Maxwell* $\left(\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\,\underline{E} + \underline{J}\right)$ si ottiene:

$$\int_S \nabla \times \underline{H} \cdot \underline{z}_0\,dS = \oint_s \underline{H} \cdot \underline{s}_0\,ds = -\int_S j\omega\varepsilon\,\underline{E} \cdot \underline{z}_0\,dS + \int_S \underline{J} \cdot \underline{z}_0\,dS$$

Essendo $H_z\,\underline{z}_o \perp \underline{s}_0$, $\underline{E}_t \perp \underline{z}_o$, $\underline{H}_t = Z_h\,\underline{h}_t, E_z = Z_h\,e_z$ e indicando con:

$$\int_S \underline{J} \cdot \underline{z}_0\,dS = \sum_i \oint_{s_{ci}} \underline{J}_{s_i} \cdot \underline{z}_0\,ds = \sum_i I_i$$

La somma algebrica delle correnti longitudinali che percorrono le superfici s_{ci} dei conduttori concatenati con s ($I_i(z) = Z_h(z)\,I_{oi}$), abbiamo:

$$\oint_s \underline{H}_t \cdot \underline{s}_0\,ds = j\omega\varepsilon \int_S E_z\,dS + \sum_i I_i \qquad \Rightarrow \qquad \oint_s \underline{h}_t \cdot \underline{s}_0\,ds = j\omega\varepsilon \int_S e_z\,dS + \sum_i I_{0i}$$

La non conservatività del campo magnetico trasversale è causata, oltre che dalle eventuali correnti di conduzione, anche dalla presenza della corrente di spostamento, legata al flusso assiale di $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$: questa è nulla (per $\omega > 0$) solo se $e_z = 0$ su S (campi ***TE*** e ***TEM***).

Le relazioni già ricavate per i modi ***TEM***, come pure per quelli ***TE*** e ***TM***, possono perciò considerarsi casi particolari di queste più generali ottenute ora, qualora si trascurino i termini integrali opportuni.

In definitiva è lecito ricondurre l'analisi di campi *e.m.* reali alla teoria ideale fin qui svolta per i modi ***TE***, ***TM***, ***TEM***, per quella gamma di frequenze che rendono trascurabili i valori delle correnti di spostamento (***TE***), di induzione (***TM***), o di

entrambe (***TEM***). In pratica tale procedimento va svolto caso per caso, giacché, ceteris paribus (tipi di materiale usato, etc.), la geometria della struttura influisce sui termini integrali.

Detto ciò, esamineremo in dettaglio alcune tipiche strutture a più conduttori.

8.1 CAVO COASSIALE

Sarà ora interessante ricavare l'espressione analitica del modo dominante ***TEM*** che si propaga in una linea di trasmissione di tipo coassiale. La struttura guidante ideale considerata (conduttore e dielettrico ideali: $g = \infty, \varepsilon_c = \varepsilon$) è schematizzata in fig. 8.1, dove con $2a$ e $2b$ si sono indicate rispettivamente il diametro esterno ed il diametro interno dei due conduttori interni ed esterni.

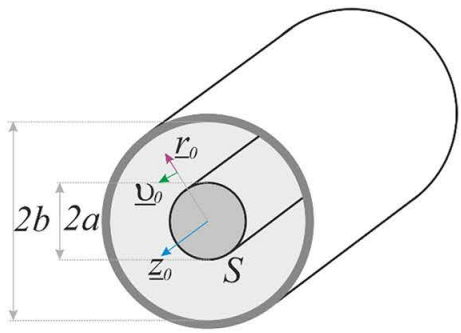


Figura 8.1 – Schematizzazione di un cavo coassiale.

Come per tutte le strutture guidanti a simmetria cilindrica adotteremo un sistema di coordinate a simmetria cilindrica ($q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = z$). La corona circolare S identifica il materiale dielettrico che separa i due conduttori metallici ($a \leq r \leq b$; $\forall \vartheta$) sul piano trasverso.

Come è noto l'espressione delle componenti sul piano trasverso per il ***TEM*** si ottiene dalla:

$$\nabla_t^2 \Phi(q_1, q_2) = 0 \qquad \text{su } S$$

Con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \Phi = \varphi_a & \text{costante sul bordo del conduttore interno } s_a \\ \Phi = \varphi_b & \text{costante sul bordo del conduttore interno } s_b \end{cases}$$

Nell'opportuno sistema di riferimento di coordinate polari (r, ϑ) tale equazione diviene:

$$\nabla_t^2 \Phi(r, \vartheta) = \frac{\partial^2 \Phi(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi(r, \vartheta)}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{su } S$$

Con $\Phi = \varphi_a$ per $r = a, \forall \vartheta$; $\Phi = \varphi_b$ per $r = b, \forall \vartheta$.

Come al solito, il metodo di separazione delle variabili ci permette di ricavare l'autofunzione nella forma $\Phi(r, \vartheta) = \mathrm{R}(r)\Theta(\vartheta)$, pertanto si ha:

$$\Theta(\vartheta)\frac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\frac{\Theta(\vartheta)}{r}\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}+\frac{\mathrm{R}(r)}{r^2}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=0 \qquad \text{su } S$$

Moltiplicando per la quantità $r^2/[\mathrm{R}(r)\Theta(\vartheta)]$ (dove l'autosoluzione $\Phi(r,\vartheta)=\mathrm{R}(r)\Theta(\vartheta)=0$ è considerata, come solito, priva di interesse):

$$\frac{r^2}{\mathrm{R}(r)}\frac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\frac{r}{\mathrm{R}(r)}\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=\nu^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{r^2}{\mathrm{R}(r)}\frac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\frac{r}{\mathrm{R}(r)}\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=-\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}$$

L'uguaglianza tra i due membri, il primo funzione della sola r, il secondo della sola ϑ, è verificata soltanto qualora questi assumano, al variare di r e ϑ, il medesimo valore costante:

$$\begin{cases}\dfrac{r^2}{\mathrm{R}(r)}\dfrac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\dfrac{r}{\mathrm{R}(r)}\dfrac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=\nu^2\\ \dfrac{d^2\Theta(\vartheta)}{d\vartheta^2}=-\nu^2\Theta(\vartheta)\end{cases}$$

Quest'ultima è nota equazione dei moti armonici, avente la soluzione:

$$\begin{cases}\Theta(\vartheta)=A_1\sin\nu\vartheta+A_2\cos\nu\vartheta & per\ \nu\neq 0\\ \Theta(\vartheta)=A_1\vartheta+A_2 & per\ \nu=0\end{cases}$$

Affinché $\Phi(r,\vartheta)=\mathrm{R}(r)\Theta(\vartheta)$ risulti costante sul contorno metallico ($\mathrm{R}(a)\Theta(\vartheta)=\varphi_a$; $\mathrm{R}(b)\Theta(\vartheta)=\varphi_b$), la funzione $\Theta(\vartheta)$ deve considerarsi indipendenze da ϑ, il che implica:

$$\nu=0 \text{ e } A_1=0, \qquad \text{da cui: } \Theta(\vartheta)=A_2=costante$$

Per la $\mathrm{R}(r)$ si ha allora l'equazione differenziale:

$$\frac{r^2}{\mathrm{R}(r)}\frac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\frac{r}{\mathrm{R}(r)}\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=0 \quad\Rightarrow\quad r\frac{d^2\mathrm{R}(r)}{dr^2}+\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=0$$

Che può essere posta nella forma:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad r\frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=A_3 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\mathrm{R}(r)}{dr}=\frac{A_3}{r}$$

Integrando entrambi i termini

$$\mathrm{R}(r)=A_3\ln r+A_4, \quad \text{con } A_3, A_4 costanti$$

L'autosoluzione Φ risulta dunque in questo caso indipendente dalla coordinata ϑ avendosi, ponendo $A_2A_3=C_1$; $A_2A_4=C_2$:

$$\Phi(r,\vartheta)=\Phi(r)=A_2(A_3\ln r+A_4)=C_1\ln r+C_2$$

Le costanti C_1 e C_2 sono direttamente legate ai valori del potenziale Φ sul contorno e alle dimensioni a e b della struttura; si hanno infatti le condizioni:

$$\begin{cases} \varphi_a = C_1 \ln a + C_2 & per\ r = a, \forall \vartheta \\ \varphi_b = C_1 \ln b + C_2 & per\ r = b, \forall \vartheta \end{cases}$$

Da tale sistema si ottiene (ad es. col metodo di sottrazione):

$$\varphi_b - \varphi_a = C_1 \ln b - C_1 \ln a \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$\begin{cases} \varphi_a \ln b = C_1 \ln a \ln b + C_2 \ln b \\ \varphi_b \ln a = C_1 \ln a \ln b + C_2 \ln a \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a = C_2 \ln b - C_2 \ln a \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a}{\ln \frac{b}{a}}$$

In definitiva si ha per il potenziale scalare:

$$\Phi(r) = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} [(\varphi_b - \varphi_a) \ln r + \varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a] \qquad [8.10]$$

Le espressioni del campo *e.m.* per il modo fondamentale in cavo coassiale sono date da:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_t = \underline{e}_t Z_e \\ \underline{H} = \underline{H}_t = \underline{h}_t Z_h \end{cases}$$

Le componenti $\underline{e}_t, \underline{h}_t$ si ricavano da Φ con le note formule di derivazione:

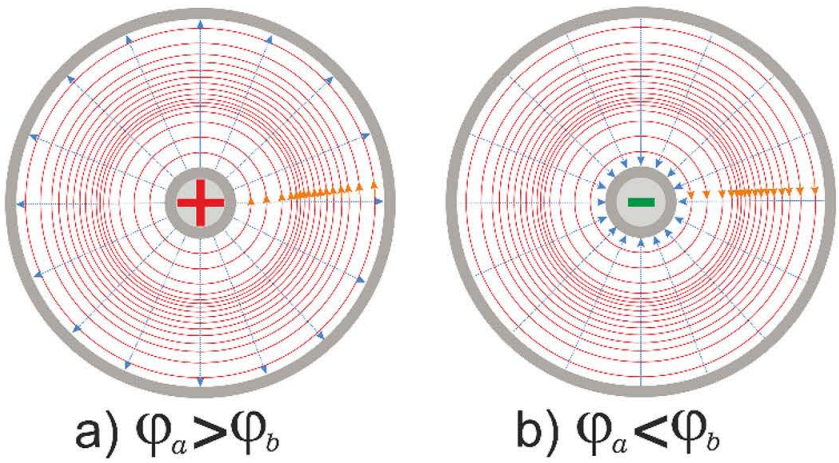


Figura 8.2 – linee di forza del TEM in cavo coassiale.

$$\begin{cases} \underline{e}_t(r) = -\nabla_t \Phi(r) = -\dfrac{d\Phi(r)}{dr}\underline{r}_0 = \dfrac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln\dfrac{b}{a}}\dfrac{1}{r}\underline{r}_0 = \dfrac{\mathrm{V}_0}{\ln\dfrac{b}{a}}\dfrac{1}{r}\underline{r}_0 \\ \underline{h}_t(r) = \dfrac{1}{Z_{TEM}}\underline{z}_0 \times \underline{e}_t(r) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\dfrac{(\varphi_b - \varphi_a)}{\ln\dfrac{b}{a}}\dfrac{1}{r}\underline{\vartheta}_0 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\dfrac{\mathrm{V}_0}{\ln\dfrac{b}{a}}\dfrac{1}{r}\underline{\vartheta}_0 \end{cases}$$

Il campo elettrico risulta quindi puramente radiale, quello magnetico puramene circonferenziale (essi sono indipendenti da ϑ e le loro intensità variano secondo $1/r$): il loro verso è determinato dal segno della differenza di potenziale $\varphi_b - \varphi_a = \mathrm{V}_0$ (il campo *e.m.* è ovviamente nullo se $\varphi_b = \varphi_a$, cioè V_0).

Le linee di forza del campo ***TEM*** sono rappresentate in fig. 8.2.

Relativamente alle correnti che percorrono i conduttori (di contorno s_a per $r = a$, e s_b per $r = b$) possiamo scrivere:

$$\underline{J}_{s_a} = \underline{n}_0' \times \underline{H}\big|_{r=a} = \underline{r}_0 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}\frac{1}{r}Z_h\underline{\vartheta}_0\Big|_{r=a} = Z_h\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}\frac{1}{a}\underline{z}_0$$

$$\underline{J}_{s_b} = \underline{n}_0'' \times \underline{H}\big|_{r=b} = -\underline{r}_0 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}\frac{1}{r}Z_h\underline{\vartheta}_0\Big|_{r=b} = -Z_h\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}\frac{1}{b}\underline{z}_0$$

Avendo orientate le normali dal conduttore al dielettrico: $\underline{n}_0' = \underline{r}_0$ su s_a; $\underline{n}_0'' = -\underline{r}_0$ su s_b, per cui integrando si ottiene:

$$I_a(z) = \oint_{s_a} \underline{J}_{s_a} \cdot \underline{z}_0\, ds = 2\pi a\, \underline{J}_{s_a} = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}Z_h(z)$$

$$I_b(z) = \oint_{s_b} \underline{J}_{s_b} \cdot \underline{z}_0\, ds = 2\pi b\, \underline{J}_{s_b} = -2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}Z_h(z) = -I_a(z)$$

Con le notazioni poste si ha:

$$I_0(z) = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)}Z_h(z) \quad \Longrightarrow \quad q_l = 2\pi\varepsilon\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)} \quad \Longrightarrow \quad C_l = \frac{q_l}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(b/a\right)}$$

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = Z_{TEM}\frac{\varepsilon}{C_l} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln\left(b/a\right)}{2\pi}$$

In relazione a quanto già osservato, l'autofunzione Φ è interpretabile fisicamente come potenziale elettrostatico della struttura in esame: in pratica la scelta dei valori φ_a, φ_b è arbitraria, risultando invece determinata la sola differenza di potenziale tra i due conduttori $\varphi_b - \varphi_a = \mathrm{V}_0$.

Ricordando l'espressione di $\Phi(r)$ si potrà osservare che questa è definita a meno di una costante additiva: il modo fondamentale (e le relative correnti) è comunque ricavabile senza indeterminazione, dipendendo unicamente da V_0 (le espressioni dei campi *e.m.* sono infatti legate a $\nabla_t \Phi(r)$ su cui la costante additiva non influisce).

8.1.1 Potenza

La potenza media P (valor medio della potenza istantanea in un periodo) trasmessa nella linea coassiale è al solito esprimibile come parte reale del flusso del vettore di *Poynting* (complesso) attraverso la sezione S ($S: a \le r \le b; 0 \le \vartheta \le 2\pi$):

$$P = Re \int_S \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{z}_0 \, dS = Re \int_S \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \underline{z}_0 \, dS$$

Nelle ipotesi poste (struttura ideale priva di perdite) è nel ***TEM*** $K_z = j\beta_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, per cui considerando la sola onda progressiva $\left(P_1 = 0: Z_e(z) = Z_h(z) = P_2 \, e^{-K_z z} = P_2 \, e^{-j\beta_z z}\right)$ si ha:

$$P = Re \int_S \frac{P_2 P_2^*}{2} \underline{e}_t \times \underline{h}_t^* \cdot \underline{z}_0 \, dS$$

Dove: $\underline{e}_t \times \underline{h}_t^* \cdot \underline{z}_0 = \underline{z}_0 \times \underline{e}_t \cdot \underline{h}_t^* = Z_{TEM} \; \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^*$; perciò:

$$P = \frac{P_2 P_2^*}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \, dS$$

Per il cavo coassiale vale:

$$\underline{h}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathrm{V}_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \underline{\vartheta}_0$$

Da cui:

$$P = \frac{P_2 P_2^*}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{V_0^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} \frac{1}{r^2} \, r \, dr \, d\vartheta = \frac{P_2 P_2^*}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{V_0^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} 2\pi \, \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \pi \, P_2 P_2^* \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{V_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Le condizioni di eccitazione iniziale sulla potenza determinano il valore di P_2.

8.1.2 Attenuazione

Per il calcolo della costante di attenuazione α_z del modo dominante in cavo coassiale, ricordiamo l'espressione generale valida per un modo ***TEM*** guidato (§6.10)

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\oint_S \underline{h}_\tau \cdot \underline{h}_\tau^* \, ds}{\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \, dS} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\oint_S \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 ds}{\int_S |\nabla_t\Phi|^2 \, dS}$$

(ricordiamo che l'equazione era stata ricavata utilizzando il metodo di perturbazione, nell'ipotesi di buon conduttore, dielettrico perfetto e sola onda progressiva).

Nel caso specifico abbiamo:

$$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial n} = \frac{d\Phi(r)}{dr} = |\nabla_t\Phi(r)| = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\frac{V_0^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}\, r\, d\vartheta\Big|_{r=a} + \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}\, r\, d\vartheta\Big|_{r=b}\right]}{\frac{V_0^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{1}{r^2}\, r\, dr\, d\vartheta}$$

Essendo: $s = s_a + s_b;\ ds = r d\vartheta; dS = r\, dr\, d\vartheta$

$$\boxed{\alpha_z = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{2\pi\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]}{2\pi\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

Risulta evidente che la costante di attenuazione dipende, oltre che dalla frequenza e dalle caratteristiche dei materiali usati, anche dalla geometria della struttura, tramite a e b.

Per ottimizzare la trasmissione d'energia in un cavo coassiale è quindi importante calcolare il particolare rapporto tra le dimensioni trasversali dei conduttori (ad es b/a) per cui si abbia la minima perdita di potenza.

Risolviamo α_z in funzione del rapporto $b/a = x$, avendo prefissato la frequenza e la dimensione b del conduttore esterno:

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{(a+b)}{ab\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}\frac{1}{b}\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = C\frac{1+x}{\ln x}$$

Tale funzione, definita per $x > 1$ $(b < a)$, ha approssimativamente l'andamento di fig. 8.3.

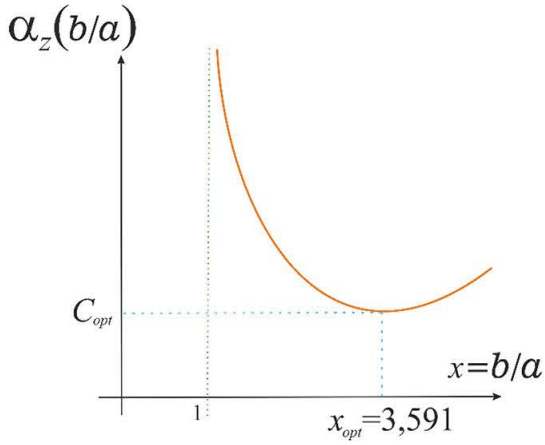


Figura 8.3 – Attenuazione $\alpha_z(b/a)$.

Il valore minimo dell'attenuazione si ottiene dalla:

$$\frac{d\alpha_z(x)}{dx} = C\frac{\ln x - \frac{1}{x}(1+x)}{\ln^2 x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln x = 1 + \frac{1}{x}$$

Che, risolta numericamente o graficamente, fornisce il valore ottimale del rapporto b/a:

$$x_{opt} = \left(\frac{b}{a}\right)_{opt} \cong 3.591 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{a}{b}\right)_{opt} \cong 0.278$$

Poiché per $x = x_{opt}$ si ottiene il valore minimo di attenuazione:

$$\alpha_{z_{min}} = \alpha_z(x_{opt}) = C\left.\frac{(1+x)}{\frac{1+x}{x}}\right|_{x=x_{opt}} = Cx_{opt} \cong 3.591\,C = \frac{3.591}{b}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{8g}}; \quad [Np\,m^{-1}]$$

$$\omega\ [s^{-1}], \qquad \varepsilon\ [F\,m^{-1}], \qquad b\ [m], \qquad g\ [S\,m^{-1}]$$

Fissato quindi il rapporto ottimale $(b/a)_{opt}$ si può osservare che $\alpha_z$diminuisce ulteriormente al crescere dei diametri dei due conduttori $(\alpha_z \propto b^{-1})$, ovviamente, all'aumentare della loro conducibilità (la dipendenza di α_z da ω è indicata qualitativamente in fig. 8.4 $(\alpha_z \propto \omega^{1/2})$.

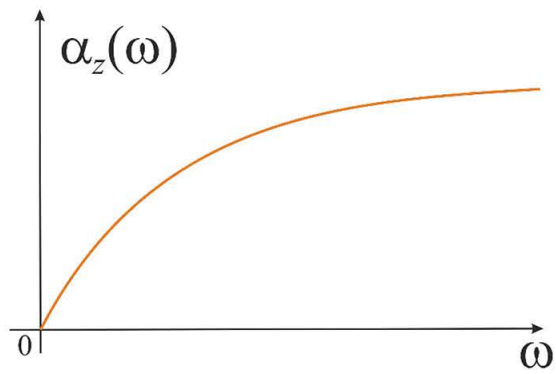


Figura 8.4 – Attenuazione $\alpha_z(\omega)$.

La possibilità di avere attenuazioni sempre minori all'aumentare delle dimensioni del cavo, viene limitata dal fatto che, al crescere di a e b, diminuisce il valore della frequenza di taglio f_c del primo modo di ordine superiore, restringendosi così l'ampiezza della banda di lavoro in regime unimodale: per la propagazione a frequenze elevate, le dimensioni dei cavi coassiali devono essere perciò opportunamente delimitate, in considerazione anche dei problemi di carattere pratico (peso, ingombro, costo, etc.).

Può calcolarsi l'espressione dell'attenuazione minima del modo ***TEM*** in funzione delle dimensioni del cavo (b in m), della conducibilità del metallo g $[S\,m^{-1}]$ e della frequenza f $[Hz]$ ponendo pertanto $(b/a)_{opt} \cong 3.591, \varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ $[F\,m^{-1}], \omega = 2\pi f$, si ottiene:

$$\alpha_{z_{min}} \cong 9{,}470 \cdot 10^{-6} \frac{1}{b}\sqrt{\frac{f}{g}}; \quad [Np\,m^{-1}]$$

Ovvero, ricordando che $1\,Np = 0.115\,dB$

$$\alpha_{z_{min}} \cong 1{,}089 \cdot 10^{-3} \frac{1}{b}\sqrt{\frac{f}{g}}; \quad [dB\,Km^{-1}]$$

Riferendoci a linee coassiali in rame $g_{Cu} \cong 5{,}8 \cdot 10^{7} [S\,m^{-1}]$, le precedenti relazioni forniscono:

$$\alpha_{z_{min}}^{(Cu)} \cong 1{,}243 \cdot 10^{-9} \frac{\sqrt{f}}{b}; \quad [Np\,m^{-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_{z_{min}}^{(Cu)} \cong 1{,}430 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{f}}{b}; \quad [dB\,Km^{-1}]$$

Le formule precedenti hanno carattere puramente teorico: i cavi utilizzati in pratica hanno infatti dimensioni normalizzate, con rapporti $\frac{b}{a}$ leggermente diversi da quello ottimale; si hanno ad esempio le coppie con:

1) $b = 0{,}475\,cm, a = 0{,}130\,cm \quad (b/a = 3{,}654; Z_c = 77{,}7\Omega)$
2) $b = 0{,}220\,cm, a = 0{,}060\,cm \quad (b/a = 3{,}667; Z_c = 77{,}9\Omega)$

Il calcolo di

1) $\alpha_{z_{min}}^{(Cu)} \cong 2{,}50 \cdot 10^{-7}\sqrt{f}; \quad [Np\,m^{-1}] \cong 3{,}0 \cdot 10^{-5}\sqrt{f}; \quad [dB\,m^{-1}]$
2) $\alpha_{z_{min}}^{(Cu)} \cong 5{,}65 \cdot 10^{-7}\sqrt{f}; \quad [Np\,m^{-1}] \cong 6{,}5 \cdot 10^{-5}\sqrt{f}; \quad [dB\,m^{-1}]$

Per il calcolo dell'attenuazione per unità di lunghezza delle strutture guidanti finora esaminate, abbiamo supposto le perdite energetiche derivanti unicamente dalle dissipazioni sui mantelli metallici (costituiti da un buon conduttore), ipotizzando invece perfetto il dielettrico.

Poiché in pratica è talvolta inevitabile l'uso di mezzi di trasmissione dissipativi, in particolare nei cavi coassiali, è interessante determinare le perdite generiche, per effetto *Joule*, dalle correnti di conduzione in un dielettrico non ideale.

In un mezzo omogeneo e isotropo con $g \neq 0$, la quarta equazione di *Maxwell* (in regime armonico, in una regione priva di sorgenti) assume la nota forma:

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E} + \underline{J} = j\omega\varepsilon\underline{E} + g\underline{E} = j\omega\varepsilon_c\underline{E}$$

Avendo definito la costante dielettrica complessa:

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{g}{\omega} = \varepsilon_0\varepsilon_r - j\frac{g}{\omega} = \varepsilon_R + j\varepsilon_J, \quad con\ \varepsilon_R = Re\{\varepsilon_c\} = \varepsilon_0\varepsilon_r, \qquad \varepsilon_J = Im\{\varepsilon_c\} = -\frac{g}{\omega}$$

È già stato osservato che la ricerca delle soluzioni del problema agli autovalori sul piano trasversale per i ***TE***, ***TM***, ***TEM*** (consistente in genere nella integrazione della $\nabla_t^2 T = K_t^2 T$, in cui K_t^2 è definito dalle proprietà geometriche della struttura) è sostanzialmente indipendente dalle caratteristiche del dielettrico: l'espressione delle componenti, funzioni delle sole coordinate trasverse, possono quindi ottenersi da quelle ideali, semplicemente sostituendo ε_c ad ε.

Importanti conseguenze si hanno invece per la costante di propagazione e conseguentemente per quella di attenuazione.

Il calcolo della α_z relativa al dielettrico (con conduttore perfetto) comporta in genere notevoli difficoltà di carattere analitico, dipendendo, fra l'altro dal particolare valore di K_t^2; con opportune approssimazioni è tuttavia facilmente ricavabile una forma particolarmente significativa per α_z dei modi ***TEM***, per i quali il valore di K_z coincide con quello di K ($K_t^2 = 0$).

Si ha infatti per il campo ***TEM*** considerato: $\underline{e}_t = -\nabla_t\Phi$; $\underline{h}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}}\underline{z}_0 \times \underline{e}_t$ dove la funzione Φ è la stessa del caso ideale;

e inoltre:

$$K_z^2 = K^2 = -\omega^2\mu\varepsilon_c = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu g \qquad \Rightarrow \qquad K_z = \alpha_z + j\beta_z = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu g}$$
$$= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{g}{\omega\varepsilon}}$$

Nei buoni dielettrici le correnti di conduzione sono molto minori di quelle di spostamento (piccole perdite), per cui è (cfr. §6.7):

$$|g\underline{E}| \ll |j\omega\varepsilon\underline{E}| \quad \Rightarrow \quad g \ll \omega\varepsilon \qquad (|\varepsilon_J| \ll \varepsilon_R)$$

Ricordiamo che per $|x| \ll 1$ si ha, con buona approssimazione (sviluppo in serie di *Mc Laurin* arrestato al termine di primo grado):

$$\sqrt{1-x} \cong \sqrt{1-x}\Big|_{x=0} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\Big|_{x=0} x = 1 - \frac{x}{2}$$

Per:

$$K_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{g}{\omega\varepsilon}} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Si ha cioè:

$$\alpha_z = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad \beta_z = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

In tal caso è lecito considerare il modo ***TEM*** come un'onda piana che si propaga con costante di fase lineare con ω, attenuandosi lungo z proporzionalmente al valore g.

(l'espressione più generale per K_z, derivante dallo sviluppo in serie di *Mc Laurin* (vedi allegato), fornisce per α_z valori dipendenti dalla frequenza[38]).

La α_z può essere ovviamente determinata riferendosi al significato fisico cui essa è collegata: indicando infatti con $P_d(z)$ la potenza media dissipata per unità di lunghezza nel dielettrico, si ha ancora:

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)}$$

Essendo $P(z)$ la potenza media trasportata nella struttura con conduttore perfetto.

Dal teorema di *Poynting* in regime armonico si ha per la potenza dissipata nel volume di base S ed altezza dz:

---

[38] P. Bernardi, "*Esercizi di elettromagnetismo*", ed Siderea, 1969: es. IV.23

$$P(z) - P(z+dz) = P_d(z)\,dz = \int_S \frac{1}{2} g\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS\,dz \quad \Longrightarrow \quad P_d(z) = \int_S \frac{1}{2} g\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS$$

Utilizzando ancora un metodo di perturbazione (per cui si ipotizza che piccole perdite non alterano la configurazione del campo *e.m.* ideale: $\varepsilon_c = \varepsilon$)

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{\int_S \frac{1}{2} g\underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS}{Re\int_S \frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^*\cdot\underline{z}_0\,dS} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2} g\int_S \underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int_S \underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dS} = \frac{8}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

Tale relazione è valida con buona approssimazione per qualsiasi tipo di struttura in cui si propaghi un'onda ***TEM*** (non essendo legata a caratteristiche geometriche).

In particolare, nel cavo coassiale possono essere considerate separatamente le perdite dovute ai conduttori e al dielettrico, qualora queste non siano troppo grandi; vale, cioè, approssimativamente la relazione:

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{P_d(z)}{P(z)} = \frac{1}{2}\frac{P_{diel.}(z) + P_{cond.}(z)}{P(z)} = \alpha_{z\,diel} + \alpha_{z\,cond}$$

8.1.3 Modi TE e TM

Esaminate le proprietà del modo dominante (***TEM***), analizzare ora i modi d'ordine superiore (***TE***, ***TM***) in cavo coassiale.

Con riferimento alla struttura di fig. 8.1, deve essere risolta l'equazione di *Helmholtz* con le relative condizioni al contorno:

$$\nabla_t^2 T = K_t^2 T \qquad \text{su } \tilde{S}\ (a < r < b; 0 \le \vartheta \le 2\pi)$$

Vendo indicato con $\tilde{S}$ la superficie esterna dei due conduttori, inoltre con:

$$T(r,\vartheta) = \begin{cases} h_z(r,\vartheta)\ \text{ per } TE + \dfrac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r} = 0 \text{ su } s\ (r = a, r = b; 0 \le \vartheta \le 2\pi) \\ e_z(r,\vartheta)\ \text{ per } TM + e_z(r,\vartheta) = 0 \text{ su } s\ (r = a, r = b; 0 \le \vartheta \le 2\pi) \end{cases}$$

A tal fine si esegue lo stesso procedimento utilizzato per la determinazione delle autosoluzioni in guida circolare (diversificandolo unicamente per le condizioni al contorno da imporre).

Perciò può subito ricavarsi (cfr. §7.2) l'espressione generica della $T(r,\vartheta)$: infatti, sempre con il metodo di separazione delle variabili $T(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$ si giunge ancora alle:

$$\begin{cases}\Theta(\vartheta) = A_1 \sin n\vartheta + A_2 \cos n\vartheta = P\cos(n\vartheta + \varphi), & n = 0,1,2,\dots \\ R(r) = B_1\mathcal{J}_n(\chi r) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r), & \chi^2 = -K_t^2 > 0\end{cases}$$

La condizione $B_2 = 0$, che si doveva imporre nella guida circolare per avere un campo *e.m.* ovunque finito, in genere qui non è necessaria: la divergenza all'infinito delle $\mathcal{Y}_n(\chi r)$ per r tendente a zero, non influisce infatti sulla determinazione dell'autosoluzione, definita ora nella corona circolare S.

(nella trattazione teorica delle linee coassiali, può aversi B_2 nullo nel caso degenere: $a = 0$, ovvero di una guida circolare con *filo metallico* assiale.

Nel caso in esame possiamo dunque scrivere:

$$T(r,\vartheta) = P\ \cos(n\vartheta + \varphi)\,[B_1\mathcal{J}_n(\chi r) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r)], \qquad con\ \begin{cases} n = 0,1,2,\dots \\ \chi^2 = -K_t^2 \end{cases}$$

Dove le costanti P e φ mantengono il significato già specificato per la guida circolare.

Distinguiamo ora la trattazione per le onde ***TE*** e ***TM***.

8.1.3.1 Modi TE

In tal caso abbiamo:

$$h_z(r,\vartheta) = P\ \cos(n\vartheta + \varphi)\,[B_1\mathcal{J}_n(\chi r) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r)]$$

Con:

$$\left.\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} P\ \cos(n\vartheta + \varphi)\left[B_1\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}_n(\chi r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} + B_2\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{Y}_n(\chi r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a}\right] = 0 \\ P\ \cos(n\vartheta + \varphi)\left[B_1\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}_n(\chi r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=b} + B_2\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{Y}_n(\chi r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=b}\right] = 0 \end{cases}$$

Dovendo verificarsi ciò per qualsiasi ϑ, si ottiene:

$$\begin{cases} B_1\mathcal{J}_n'(\chi a) + B_2\mathcal{Y}_n'(\chi a) = 0 \\ B_1\mathcal{J}_n'(\chi b) + B_2\mathcal{Y}_n'(\chi b) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema omogeneo di due equazioni in due incognite (B_1, B_2) ammette soluzioni diverse dalla banale (e autosoluzioni) se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo[39]

$$\mathcal{J}'_n(\chi a)\mathcal{Y}'_n(\chi b) - \mathcal{J}'_n(\chi b)\mathcal{Y}'_n(\chi a) = 0$$

Che può anche porsi nella forma:

$$\frac{\mathcal{J}'_n(\chi a)}{\mathcal{Y}'_n(\chi a)} = \frac{\mathcal{J}'_n(\chi b)}{\mathcal{Y}'_n(\chi b)} = -\frac{B_2}{B_1}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Questa è l'*equazione caratteristica* dei modi ***TE*** in cavo coassiale può dimostrarsi che essa ammette per ogni n (fissati a e b) una infinità numerabile di soluzioni χ. Analogamente a quanto già posto, l'm-esima radice ($m = 1,2,3,\dots$) dell'equazione caratteristica di indice n per i ***TE*** è indicata con $\chi'_{n,m}$, cui corrisponde l'autovalore: $K^2_{t[n,m]} = -\left(\chi'_{n,m}\right)^2 \; con \; n = 0,1,2,\dots; m = 1,2,\dots$

Il problema analitico della determinazione delle soluzioni dell'equazione caratteristica può essere semplificato attraverso una normalizzazione opportuna che fa comparire il rapporto tra i diametri dei conduttori.

Infatti, ponendo ad es.: $\chi b = \xi$, per cui $\chi a = \frac{a}{b}\xi = q\xi$, con $\left(q = \frac{a}{b}\right)$, si ha:

$$\mathcal{J}'_n(q\xi)\mathcal{Y}'_n(\xi) - \mathcal{J}'_n(\xi)\mathcal{Y}'_n(q\xi) = 0$$

$$\frac{\mathcal{J}'_n(q\xi)}{\mathcal{Y}'_n(q\xi)} = \frac{\mathcal{J}'_n(\xi)}{\mathcal{Y}'_n(\xi)} \quad n = 0,1,2,\dots$$

La soluzione $\xi'_{n,m}$ risulta dunque la stessa per ogni classe di cavi coassiali aventi un determinato valore q: da questa è poi possibile risalire all'autovalore per ciascun cavo con le:

$$\chi'_{n,m} = \frac{\xi'_{n,m}}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad K^2_{t[n,m]} = -\left(\frac{\xi'_{n,m}}{b}\right)^2$$

8.1.3.2 Modi TM

In tal caso abbiamo:

$$e_z(r,\vartheta) = P \; \cos(n\vartheta + \varphi)\,[B_1\mathcal{J}_n(\chi r) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r)]$$

[39] Cfr.: Ghizzetti-Rosati: "*Lezioni di analisi matematica*", vol. 2, 3 ed Veschi, teorema 14.4.II.

Con:

$$e_z(r,\vartheta)|_{r=a} = e_z(r,\vartheta)|_{r=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P\ \cos(n\vartheta+\varphi)\,[B_1\mathcal{J}_n(\chi r)|_{r=a} + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r)|_{r=a}] = 0 \\ P\ \cos(n\vartheta+\varphi)\,[B_1\mathcal{J}_n(\chi r)|_{r=b} + B_2\mathcal{Y}_n(\chi r)|_{r=b}] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} [B_1\mathcal{J}_n(\chi a) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi a)] = 0 \\ [B_1\mathcal{J}_n(\chi b) + B_2\mathcal{Y}_n(\chi b)] = 0 \end{cases}$$

Tale sistema omogeneo di due equazioni in due incognite (B_1, B_2) ammette soluzioni diverse dalla banale (e autosoluzioni) se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo[40]

$$\mathcal{J}_n(\chi a)\mathcal{Y}_n(\chi b) - \mathcal{J}_n(\chi b)\mathcal{Y}_n(\chi a) = 0$$

Che può anche porsi nella forma:

$$\frac{\mathcal{J}_n(\chi a)}{\mathcal{Y}_n(\chi a)} = \frac{\mathcal{J}_n(\chi b)}{\mathcal{Y}_n(\chi b)} = -\frac{B_2}{B_1}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Questa è l'*equazione caratteristica* dei modi ***TM*** in cavo coassiale.

In base alle stesse considerazioni svolte per i campi ***TE***, avremo una infinità numerabile di soluzioni $\chi_{n,m}$ e quindi gli autovalori:

$$K^2_{t(n,m)} = -\left(\chi_{n,m}\right)^2 \ con\ n = 0,1,2,\dots; m = 1,2,\dots$$

Il problema della risoluzione dell'equazione caratteristica può di nuovo essere semplificato, ponendo $\chi b = \xi$, per cui $\chi a = \frac{a}{b}\xi = q\xi$, con $\left(q = \frac{a}{b}\right)$, si ha:

$$\mathcal{J}_n(q\xi)\mathcal{Y}_n(\xi) - \mathcal{J}_n(\xi)\mathcal{Y}_n(q\xi) = 0$$

Oppure,

$$\frac{\mathcal{J}_n(q\xi)}{\mathcal{Y}_n(q\xi)} = \frac{\mathcal{J}_n(\xi)}{\mathcal{Y}_n(\xi)} = -\frac{B_2}{B_1}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Determinate le

$$\chi_{n,m} = \frac{\xi_{n,m}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad K^2_{t(n,m)} = -\left(\frac{\xi_{n,m}}{b}\right)^2$$

40 Cfr.: Ghizzetti-Rosati: "Lezioni di analisi matematica", vol. 2, 3 ed Veschi, teorema 14.4.II.

Note le $\xi_{n,m}(q)$ e $\xi'_{n,m}(q)$, per qualsiasi cavo coassiale risulta determinato lo spettro dei modi d'ordine superiore.

Si ricava analiticamente che fra tutte le soluzioni $\xi'_{n,m}$ e $\xi_{n,m}$, quella avente valore minimo è la $\xi'_{1,1}$ (primo zero della $\mathcal{J}'_n(q\xi)\mathcal{Y}'_n(\xi) - \mathcal{J}'_n(\xi)\mathcal{Y}'_n(q\xi) = 0$), cui corrisponde il primo modo d'ordine superiore $TE_{1,1}$ (che delimita la banda in regime unimodale).

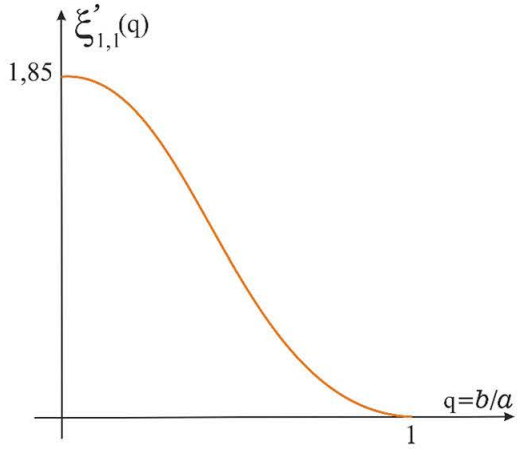


Figura 8.5 – Andamento $\xi'_{1,1}(q)$.

Per esso, le grandezze tipiche possono dedursi dalle formule generali per i ***TE***:

$$\begin{cases} K^2_{t[n,m]} = -\omega_c^2\mu\varepsilon = -\left(\dfrac{\xi'_{n,m}}{b}\right)^2 \\ \omega_{c[n,m]} = c\dfrac{\xi'_{n,m}}{b} \\ f_{c[n,m]} = \dfrac{c}{2\pi}\dfrac{\xi'_{n,m}}{b} \\ \lambda_{c[n,m]} = 2\pi\dfrac{b}{\xi'_{n,m}} \end{cases}$$

in fig. 8.5 viene riportato l'andamento di $\xi'_{1,1}$ al variare del rapporto $q = a/b \in [0,1]$.

Nello studio del modo $TE_{1,1}$ si suole rappresentare graficamente la grandezza adimensionale $g(q)$ definita dalla relazione:

$$g(q)\,\lambda_{c[1,1]} = \pi(a+b)$$

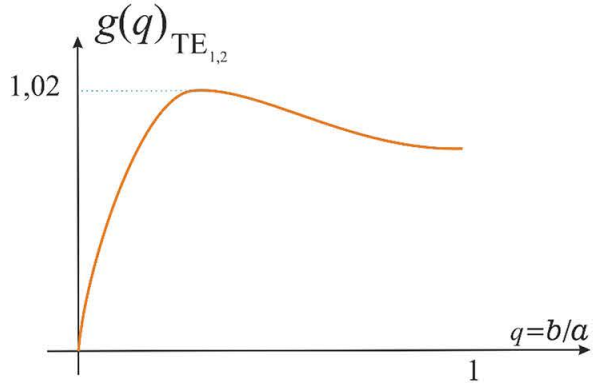


Figura 8.6 – Andamento $g(q)$.

La funzione $g(q)$ è rappresentata in fig. 8.6[41]; per essa vale la relazione che lega a $\xi'_{1,1}$

$$g(q) = \frac{\pi(a+b)}{\lambda_{c[1,1]}} = \frac{(a+b)}{2b}\xi'_{1,1}(q) = \frac{(q+1)}{2}\xi'_{1,1}(q)$$

41 C.G. Montgomery, "*Principles of microwave circuits*", McGraw-Hill 1948: §2.4

In particolare, è allora possibile ricavare alcune interessanti considerazioni su tale modo. Al diminuire del raggio sul conduttore interno ($a \to 0, q \to 0$), il valore di $\xi'_{1,1}$, essendo:

$$\lim_{q\to 0} \frac{\mathcal{J}'_1(q\xi)}{\mathcal{Y}'_1(q\xi)} = 0$$

Si ottiene semplicemente dal primo zero della:

$$\frac{\mathcal{J}'_1(\xi)}{\mathcal{Y}'_1(\xi)} = \lim_{q\to 0} \frac{\mathcal{J}'_1(q\xi)}{\mathcal{Y}'_1(q\xi)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}'_1(\xi) = 0 \quad (\Rightarrow B_2 = 0)$$

Come già visto (§7.2.2), la prima radice della $\mathcal{J}'_1(\xi) = 0$ si ha per $\xi = \xi'_{1,1} = 1{,}841$. Pertanto, nel caso limite $a = 0$ il primo modo d'ordine superiore in cavo coassiale tende ad assumere lo stesso autovalore, nonché la medesima frequenza di taglio e configurazione, del modo dominante in guida circolare (di raggio b).

(il caso limite $a \to b,\ q \to 1$, è privo di interesse, non esistendo più, in pratica il mezzo trasmissivo; l'equazione caratteristica, e quindi B_1 e B_2, risultano in effetti indeterminate).

Per un ampio intervallo di valori di q, la $g(q)$ può essere approssimata all'unità (§ fig. 8.6), per cui divenendo $\lambda_{c[1,1]} \cong \pi(a+b)$ si ha immediatamente il valore della lunghezza d'onda critica $\lambda_{c[1,1]}$, circa pari alla circonferenza media del cavo (uguale a $2\pi F$, con $F = (a+b)/2$)[42].

Fissato un determinato valore di $q = \frac{a}{b}$, il modulo di K_t^2 e di f_c per ogni modo, diminuisce al crescere delle dimensioni del cavo (come si vede facilmente dalle relazioni ottenute), riducendosi tra l'altro l'ampiezza della banda di regime unimodale.

La Tab. 8.1 fornisce lo spettro dei primi modi per un cavo coassiale con $q = 0{,}278$ (valore ottimale per l'attenuazione del ***TEM***)

[42] Si potrà vedere intuitivamente che in tal caso, riducendosi gli effetti della curvatura, la curvatura del campo *e.m.* del modo degenere in cavo coassiale tende a coincidere con quella del $TE_{1,0}$ in guida rettangolare la cui dimensione maggiore sia pari alla semicirconferenza media del cavo (e analogamente le λ_c, etc.).

Ordine	Modi	Zeri (ξ)	$f_c\, b^*$	λ_c/b^*
-	TEM	-	0	∞
1	$TE_{1,1}$	1,611	7,685	3,901
2	$TE_{2,1}$	2,990	14,269	2,101
3	$TE_{3,1}$	4,190	19,993	1,499
4	$TM_{0,1}$	4,272	20,384	1,471
5	$TE_{0,1}, TM_{1,1}$	4,589	21,897	1,369
6	$TE_{1,2}$	5,072	24,199	1,239
7	$TE_{4,1}$	5,318	25,377	1,181
8	$TM_{2,1}$	5,401	25,769	1,163
9	$TE_{2,2}$	6,304	30,081	0,997
10	$TE_{5,1}$	6,419	30,630	0,979
11	$TM_{3,1}$	6,463	30,838	0,972
12	$TE_{6,1}$	7,506	35,815	0,837
13	$TM_{4,1}$	7,614	36,331	0,825
14	$TE_{3,2}$	7,793	37,185	0,806

.

Tabella 8.1 – Grandezze caratteristiche dei modi in cavo coassiale.

(*) I valori numerici di tabella sono stati ottenuti considerando il raggio esterno b del cavo e λ_c espressi in cm e f_c in GHz.

Per i due cavi normalizzati già citati si ha per il modo d'ordine superiore:

1) $b = 0{,}475\ cm, a = 0{,}130\ cm\ (q = 0{,}274)$: $f_c \cong 16{,}20\ GHz;\ \lambda_c \cong 1{,}85\ cm$
2) $b = 0{,}220\ cm, a = 0{,}060\ cm\ (q = 0{,}273)$: $f_c \cong 35{,}27\ GHz;\ \lambda_c \cong 0{,}85\ cm$

Si potrà osservare che, come nella guida circolare, i modi $TE_{0,m}$ e $TM_{1,m}$ sono degeneri (essendo: $\mathcal{J}_0'(x) = -\mathcal{J}_1(x);\ \mathcal{Y}_0'(x) = -\mathcal{Y}_1(x)$).

Per le componenti dei campi ***TE*** e ***TM*** si ha infine (indicando per semplicità $\chi'_{n,m}$ e $\chi_{n,m}$ con $\bar{\chi}$):

8.1.3.3 Modi TE

Ponendo formalmente:

$$-\frac{B_2}{B_1} = \frac{\mathcal{J}_n'(a\bar{\chi})}{\mathcal{Y}_n'(a\bar{\chi})} = \frac{\mathcal{J}_n'(b\bar{\chi})}{\mathcal{Y}_n'(b\bar{\chi})} = \frac{\mathcal{J}_n'\left(\frac{a}{b}\bar{\chi}\right)}{\mathcal{Y}_n'\left(\frac{a}{b}\bar{\chi}\right)}$$

Segue:

$$h_z(r,\vartheta) = PB_1\ \cos(n\vartheta + \varphi)\left[\mathcal{J}_n(\bar{\chi}r) - \frac{\mathcal{J}_n'\left(\frac{a}{b}\bar{\chi}\right)}{\mathcal{Y}_n'\left(\frac{a}{b}\bar{\chi}\right)}\mathcal{Y}_n(\bar{\chi}r)\right]$$

$$\underline{h}_t(r,\vartheta) = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t h_z = \frac{K_z}{K_t^2}\left[\frac{\partial h_z}{\partial r}\underline{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \vartheta}\underline{\vartheta}_0\right] = h_r\underline{r}_0 + h_\vartheta\underline{\vartheta}_0 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} h_r(r,\vartheta) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial r} = -\dfrac{K_z}{\sqrt{-K_t^2}}PB_1 n\,\cos(n\vartheta+\varphi)\left[\mathcal{J}_n'(\bar{\chi}r) - \dfrac{\mathcal{J}_n'\left({}_b^a\bar{\chi}\right)}{\mathcal{Y}_n'\left({}_b^a\bar{\chi}\right)}\mathcal{Y}_n'(\bar{\chi}r)\right] \\ h_\vartheta(r,\vartheta) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h_z(r,\vartheta)}{\partial \vartheta} = -\dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{PB_1 n\,\sin(n\vartheta+\varphi)}{r}\left[\mathcal{J}_n(\bar{\chi}r) - \dfrac{\mathcal{J}_n'\left({}_b^a\bar{\chi}\right)}{\mathcal{Y}_n'\left({}_b^a\bar{\chi}\right)}\mathcal{Y}_n(\bar{\chi}r)\right] \end{cases}$$

$$\underline{e}_t(r,\vartheta) = \frac{j\omega\mu}{K_z}\underline{h}_t(r,\vartheta)\times\underline{z}_0 = \frac{j\omega\mu}{K_z}\left[h_r\underline{r}_0 + h_\vartheta\underline{\vartheta}_0\right]\times\underline{z}_0 = \frac{j\omega\mu}{K_z}\left[h_\vartheta\underline{r}_0 - h_r\underline{\vartheta}_0\right] = e_r\underline{r}_0 + e_\vartheta\underline{\vartheta}_0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e_r = \dfrac{j\omega\mu}{K_z}h_\vartheta = Z_{TE}\,h_\vartheta \\ e_\vartheta = -\dfrac{j\omega\mu}{K_z}h_r = -Z_{TE}\,h_r \end{cases}$$

8.1.3.4 Modi TM

Analogamente a quanto ricavato per i modi ***TE*** abbiamo:

$$e_z(r,\vartheta) = P\,B_1\cos(n\vartheta+\varphi)\left[\mathcal{J}_n(\overline{\chi}r) - \frac{\mathcal{J}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}{\mathcal{Y}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}\mathcal{Y}_n(\overline{\chi}r)\right]$$

$$e_z(r,\vartheta) = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t e_z = \frac{K_z}{K_t^2}\left[\frac{\partial e_z}{\partial r}\underline{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \vartheta}\underline{\vartheta}_0\right] = e_r\underline{r}_0 + e_\vartheta\underline{\vartheta}_0 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} e_r(r,\vartheta) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{\partial e_z(r,\vartheta)}{\partial r} = -\dfrac{K_z}{\sqrt{-K_t^2}}PB_1 n\,\cos(n\vartheta+\varphi)\left[\mathcal{J}_n'(\overline{\chi}r) - \dfrac{\mathcal{J}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}{\mathcal{Y}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}\mathcal{Y}_n'(\overline{\chi}r)\right] \\ e_\vartheta(r,\vartheta) = \dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial e_z(r,\vartheta)}{\partial \vartheta} = -\dfrac{K_z}{K_t^2}\dfrac{PB_1 n\,\sin(n\vartheta+\varphi)}{r}\left[\mathcal{J}_n(\overline{\chi}r) - \dfrac{\mathcal{J}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}{\mathcal{Y}_n\left(\overline{\chi}\,{}_b^a\right)}\mathcal{Y}_n(\overline{\chi}r)\right] \end{cases}$$

$$\underline{h}_t(r,\vartheta) = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_0\times\underline{e}_t(r,\vartheta) = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\underline{z}_0\times\left[e_r\underline{r}_0 + e_\vartheta\underline{\vartheta}_0\right] = \frac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}\left[-e_\vartheta\underline{r}_0 + e_r\underline{\vartheta}_0\right]$$
$$= h_r\underline{r}_0 + h_\vartheta\underline{\vartheta}_0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} h_r = -\dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}e_\vartheta = -\dfrac{1}{Z_{TM}}\,e_\vartheta \\ h_\vartheta = \dfrac{j\omega\varepsilon_c}{K_z}e_r = \dfrac{1}{Z_{TM}}\,e_r \end{cases}$$

Non ci va le leggi di dipendenza con z sono le solite per i ***TE*** e ***TM***:

$$\begin{cases} Z_e(z) = P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \\ Z_h(z) = -P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z} \end{cases}$$

$$K_z = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c - K_t^2} = \begin{cases} \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c + \chi'^2_{n,m}} & \text{modi TE} \\ \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c + \chi^2_{n,m}} & \text{modi TM} \end{cases}$$

Linee Di Trasmissione

II Parte

9 METODOLOGIA DELLE LINEE DI TRASMISSIONE

Fino ad ora abbiamo studiato la propagazione in strutture guidanti con una metodologia elettromagnetica, la quale, attraverso le equazioni di *Maxwell*, ci ha consentito di analizzare i campi elettromagnetici all'interno di una struttura. Studieremo ora una nuova metodologia da applicare, che considera le strutture guidanti caratterizzate dalle loro proprietà di propagazione. In questo caso lo studio del campo è limitato alla direzione z di propagazione, quindi la struttura viene considerata come se fosse unidimensionale, cioè non ci interessa conoscere i campi trasversi anche se sappiamo che esistono e influiscono.

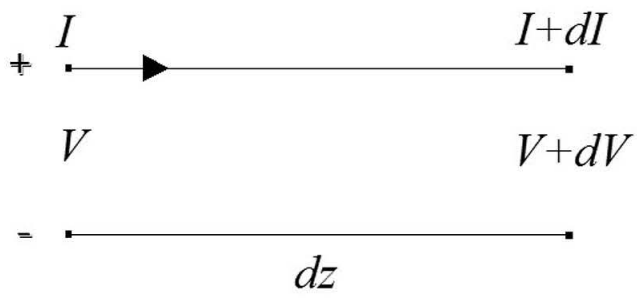


Figura 9.1 Linea di Trasmissione 1

Una linea di trasmissione è un modello matematico a cui non corrisponde alcuna struttura fisica, questa linea lega fra loro le funzioni di variabile reale, che sono $V(z)$ e $I(z)$, tramite certe equazioni differenziali.

Tra le grandezze $V(z)$ ed $I(z)$ esiste una coppia di equazioni differenziali del primo ordine del tipo:

$$\frac{dV}{dz} = -Z\,I,\ \frac{dI}{dz} = -Y\,V \qquad (9.1)$$

Dove Z ed Y sono rispettivamente l'impedenza e l'ammettenza per unità di lunghezza della linea.

Al modello matematico visto si può associare una analogia fisica, a questo scopo si pensi a coppia bifilare. Si noti che questo modello è utilizzabile per lo studio di tutte le strutture guidanti viste in precedenza. Questa utilizzazione viene però fatta con degli opportuni accorgimenti che introdurremo, questo perché si omette lo studio della sezione trasversa ed in più si introducono delle grandezze arbitrarie, cioè sono necessarie delle definizioni. Nel modello che stiamo studiando le Z e le Y sono legate ad altre grandezze caratteristiche di questa struttura, cioè:

Impedenza caratteristica della linea:

$$\eta = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \tag{9.2}$$

Costante di propagazione della linea:

$$K_z = \sqrt{ZY} \tag{9.2b}$$

9.1 PROPRIETÀ GENERALI DEI MODI.

Abbiamo in precedenza visto che, le strutture guidanti sono caratterizzate da una propagazione del campo *e.m.* con determinate configurazioni spaziali chiamate modi (***TE***, ***TM*** e ***TEM***). Di questi modi ne abbiamo fatto uno studio dal punto di vista delle componenti trasverse $\underline{h}_t, \underline{e}_t$ che ora risulterà molto utile.

$$\underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2)[P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}] \tag{9.3}$$

$$\underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2)[-P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}] \tag{9.4}$$

Queste leggi di variazione sono generali, cioè valgono per qualsiasi tipo di modo. Abbiamo espresso la relazione tra $\underline{h}_t, \underline{e}_t$ attraverso una grandezza scalare η chiamata Impedenza d'onda:

$$\underline{e}_t(q_1, q_2) = \eta_z\left[\underline{h}_t(q_1, q_2) \times \underline{z}_0\right] \tag{9.5}$$

L'impedenza d'onda si esprime in maniera diversa a seconda dei modi ***TE***, ***TM*** o ***TEM*** che vogliamo trattare.

$$\eta_z = \frac{j\omega\mu}{K_z}, \ [modo\ \text{TE}] \tag{9.6}$$

$$\eta_z = \frac{K_z}{j\omega\mu}, \ [modo\ \text{TM}] \tag{9.7}$$

$$\eta_z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \ [modo\ \text{TEM}] \tag{9.8}$$

Inoltre, in queste strutture guidanti vale la seguente relazione:

$$K_z^2 + K_t^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \tag{9.9}$$

Se le strutture guidanti sono ideali (prive di perdite), cioè caratterizzate da conduttori e dielettrici perfetti, si ha:

$$K_t^2 = \text{reale negativo}$$

Conseguentemente in base alla (9.9) si possono verificare le due seguenti possibilità:

K_z = *Reale* ⟹ *Non si ha propagazione (Sotto cut-off)*

K_z = *Immaginario* ⟹ *Si ha propagazione (Sopra cut-off)*

Infine, se la struttura è priva di perdite, posso sempre assumere, per qualsiasi tipo di modo, che $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ siano entrambi reali o entrambi immaginari. Infatti, per i modi ***TE*** abbiamo visto che per η_z reale $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ sono entrambi immaginari, mentre per η_z immaginario $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ sono reali. Un'ultima proprietà già vista è quella che $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ sono soluzioni di equazioni differenziali omogenee quindi possono essere normalizzate in modo del tutto arbitrario. Questo vuol dire che è determinata solo la forma del campo, ma non l'ampiezza, che può essere determinata solo se fisso qualche condizione, del tipo la potenza entrante nella struttura. È evidente dalle formule scritte, che la proprietà del campo *e.m.* trasverso, sono espresse come prodotto di funzioni nelle variabili trasverse e longitudinali, quindi resta da vedere se, trascurando la dipendenza trasversale, la legge di variazione secondo z può essere adattata al modello matematico delle linee di trasmissione, che abbiamo visto.

A questo punto possiamo introdurre due costanti arbitrarie che chiameremo con K_e e K_h, in modo da scrivere che:

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1,q_2,z) = \frac{\underline{e}_t(q_1,q_2)}{K_e}\left[P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}\right] K_e \\ \underline{H}_t(q_1,q_2,z) = \frac{\underline{h}_t(q_1,q_2)}{K_h}\left[-P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}\right] K_h \end{cases} \tag{9.10}$$

In modo del tutto formale scriviamo che:

$$\begin{cases} V_z(z) = K_e\left[P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}\right] \\ I_z(z) = K_h\left[-P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}\right] \end{cases} \tag{9.11}$$

Derivando rispetto a z otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{dV_z(z)}{dz} = K_e K_z\left[P_1 e^{K_z z} - P_2 e^{-K_z z}\right] = -\frac{K_e K_z}{K_h} I_z(z) \\ \frac{dI_z(z)}{dz} = K_h K_z\left[-P_1 e^{K_z z} - P_2 e^{-K_z z}\right] = -\frac{K_h K_z}{K_e} V_z(z) \end{cases} \tag{9.12}$$

Confrontando le (9.12) con le equazioni delle linee di trasmissione possiamo dire che sono coincidenti purché valgano le relazioni:

$$\begin{cases} Z = \frac{K_e K_z}{K_h} \\ Y = \frac{K_h K_z}{K_e} \end{cases} \tag{9.13}$$

Notiamo quindi che, con tali accorgimenti, le proprietà di variazione di V e I (che non sono grandezze fisiche, ma grandezze legate alla propagazione del modo) sono legate tra loro da equazioni simili a quelle delle linee di trasmissione. Le costanti K_e e K_h in realtà non sono indipendenti ma devono soddisfare alle seguenti relazioni del modello matematico:

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \\ K_z = \sqrt{ZY} \end{cases} \tag{9.14}$$

Dalla prima delle (9.12) si ha che:

$$\begin{cases} \frac{K_e}{K_h} = \frac{Z}{K_z} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \eta \\ Z = \eta\, K_z \\ Y = \frac{K_z}{\eta} \end{cases} \tag{9.15}$$

Un ultimo passo da verificare affinché la struttura effettiva e il modello siano coincidenti è che le potenze trasportate siano uguali. La potenza trasportata dalla linea di trasmissione è:

$$P = \frac{V\, I^*}{2} \tag{9.16}$$

Sappiamo che la potenza trasportata in una struttura guidante è legata al campo elettrico e magnetico trasverso, cioè:

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E}_t \times \underline{H}_t^*\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS \tag{9.17}$$

Essendo:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = \dfrac{V_z(z)}{K_e}\, \underline{e}_t \\ \underline{H}_t = \dfrac{I_z(z)}{K_h}\, \underline{h}_t \end{cases}$$

Per cui sostituendo nella (9.17) si ottiene:

$$P = \frac{V_z(z)\, I_z(z)^*}{2\, K_e K_h^*} \int_S \left(\underline{e}_t \times \underline{h}_t^*\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS \tag{9.18}$$

Consideriamo per un attimo l'integrale; sostituendovi la relazione (9.5) otteniamo:

$$\int_S \left(\underline{e}_t \times \underline{h}_t^*\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS = \int_S \left(\underline{h}_t \times \underline{z}_0\right) \cdot \left(\underline{h}_t^* \times \underline{z}_0\right) dS = \eta_z \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \, dS \tag{9.19}$$

Abbiamo visto che $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$, in quanto soluzioni di equazioni differenziali omogenee, possono essere normalizzate a piacimento. In questo caso adotteremo la normalizzazione:

$$\eta_z \int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t^* \, dS = 1 \tag{9.20}$$

Per cui la (9.18) diviene:

$$P = \frac{V_z(z)\, I_z(z)^*}{2\, K_e K_h^*} \tag{9.21}$$

Confrontando le (9.16) e le (9.21), che devono essere uguali affinché il modello e la struttura trasportino la stessa potenza, si ottiene:

$$K_e K_h^* = 1 \tag{9.22}$$

Quindi è possibile scegliere qualsiasi valore di K_e e K_h purché siano soddisfatte la (9.15) e la (9.22). Comunque, anche η è un parametro arbitrario, quindi posso pensare di riscrivereK_e e K_h in funzione di η.

Per far ciò si noti che dalla (9.22) si deduce che K_e e K_h o sono entrambe reali o hanno la stessa fase. Comunque, dato che la linea è stata supposta priva di perdite (η reale), per la (9.16) possiamo affermare che K_e e K_h sono entrambe reali, quindi:

$$\begin{cases} K_e K_h = 1 \\ K_e = \eta\, K_h \end{cases} \tag{9.23}$$

da cui

$$\eta\, K_h^2 = 1 \implies K_h \frac{1}{\sqrt{\eta}} \implies K_e \sqrt{\eta}$$

In questo modo abbiamo finalmente visto come ci sia una precisa aderenza nello studio della propagazione, cioè delle proprietà di dipendenza secondo z, tra il modo di una struttura guidante ed il modello di una linea di trasmissione, dove $V(z)$ e $I(z)$ sono delle funzioni che non sono fisicamente riconoscibili, ma che sono state univocamente definite (a meno di un valore costante η). Infatti, si ha:

$$\begin{cases} V_z(z) = \sqrt{\eta}[P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}] \\ I_z(z) = \frac{K_h}{\sqrt{\eta}}[-P_1 e^{K_z z} + P_2 e^{-K_z z}] \end{cases} \tag{9.23}$$

È importante notare che la metodologia della teoria dei circuiti permette di studiare i circuiti a microonde che hanno invece una struttura a costanti concentrate. Sostituendo i valori di $V(z)$ e $I(z)$ nelle (9.10) si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{E}_t(q_1,q_2,z) = \frac{\underline{e}_t(q_1,q_2)}{\sqrt{\eta}} V_z(z) \\ \underline{H}_t(q_1,q_2,z) = \sqrt{\eta}\, \underline{h}_t(q_1,q_2)\, I_z(z) \end{cases} \tag{9.24}$$

A questo punto la linea non è stata ancora individuata per l'arbitrarietà di η, scegliere la η equivale ad individuare una Z e Y e quindi $V(z)$ e $I(z)$ che a loro volta mi determinano la linea.

Esistono più formulazioni per fissare questo parametro η

1) Una prima formulazione consiste nello scegliere l'impedenza caratteristica della linea equivalente al modo uguale all'impedenza dell'onda del modo stesso, cioè:

$$\eta = \eta_z$$

2) La seconda formulazione consiste nello scegliere l'impedenza caratteristica della linea pari ad 1.

$$\eta = 1$$

Vediamo come queste diverse formulazioni portano a diversi circuiti equivalenti per quanto riguarda i modi delle strutture precedentemente studiate.

Consideriamo per ora il modo ***TE*** nelle guide d'onda e cerchiamo la linea equivalente in base alle due formulazioni viste. In base alla (9.7) sappiamo che l'impedenza d'onda per il modo ***TE*** è:

$$\eta_{z[TE]} = \frac{j\omega\mu}{K_z} = \frac{\omega\mu}{\beta_z} \tag{9.25}$$

Questa è una quantità fisica reale ben determinata, una volta data la frequenza a cui si propaga e la costante di propagazione β_z che è legata alle dimensioni della sezione trasversa della guida.

In base alla prima formulazione ($\eta = \eta_z$) si ottiene che:

$$\begin{cases} Z = \eta_z K_z = \frac{j\omega\mu}{\beta_z}\beta_z = j\omega\mu \\ \mathrm{Y} = \frac{K_z}{\eta_z} = \frac{j\beta_z}{\omega\mu}\beta_z = j\frac{\beta_z^2}{\omega\mu} \end{cases} \tag{9.26}$$

Il circuito corrispondente è:

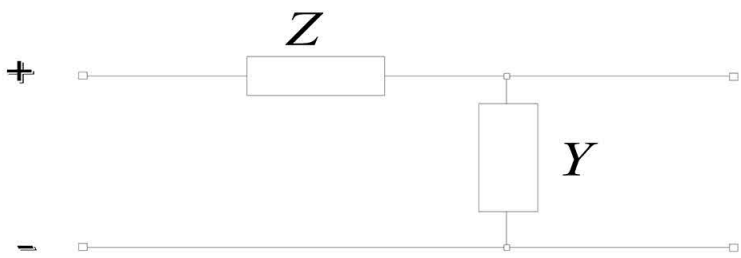


Figura 9.2 - Linea equivalente a costanti concentrate.

Ricordiamo che nelle guide d'onda vale la relazione (9.9):

$$K_z^2 + K_t^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon$$

e inoltre avendo supposto K_z^2 immaginario puro e ricordando che K_t^2 è reale e negativo ed è legato alla frequenza di cut-off, si ha:

$$-\beta_z^2 - \omega_c^2 \mu\varepsilon = -\omega^2 \mu\varepsilon$$

e quindi

$$\beta_z^2 = (\omega^2 - \omega_c^2)\mu\varepsilon$$

Se $\omega = \omega_c$ la costante di fase $\beta_z = 0$.

Tenuto conto di tale espressione dalle (9.26) si ottiene che:

$$\begin{cases} Z = j\omega\mu \\ \mathrm{Y} = j\omega\varepsilon - j\frac{\omega_c^2 \varepsilon}{\omega} \end{cases} \tag{9.27}$$

In definitiva il circuito equivalente è formato da un'impedenza serie (induttanza di valore μ) e un'ammettenza in parallelo, costituita da un condensatore di capacità ε ed un'induttanza di induttanza $1/\omega_c^2 \varepsilon$

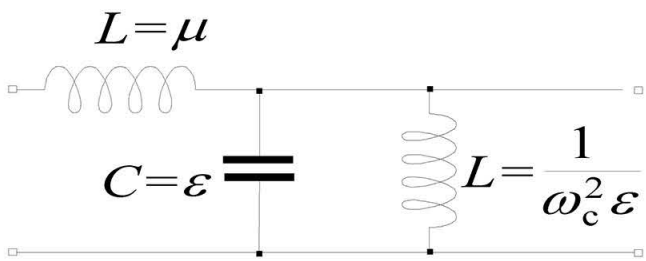


Figura 9.3 - Linea equivalente per $\omega = \omega_c$

Questo dunque è il circuito equivalente per unità di lunghezza del modo ***TE*** in una guida d'onda. Facciamo delle importanti considerazioni: si nota che sul ramo

parallelo se $\omega > \omega_c$ la parte capacitiva prevale su quella induttiva, quindi abbiamo una struttura del tipo

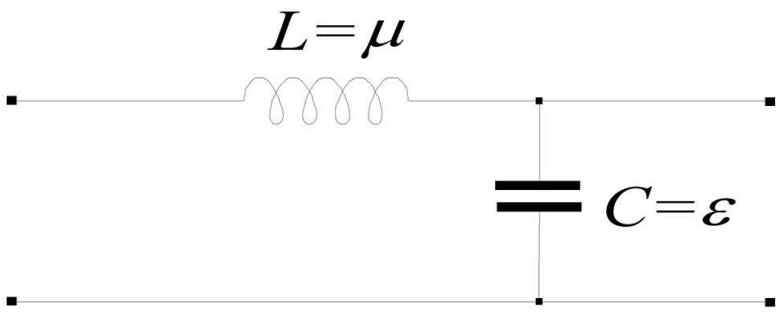


Figura 9.4 - Linea equivalente per $\omega > \omega_c$

che consente la trasmissione, mentre se la $\omega < \omega_c$ la parte induttiva prevale su quella capacitiva per cui il circuito si semplifica nel seguente:

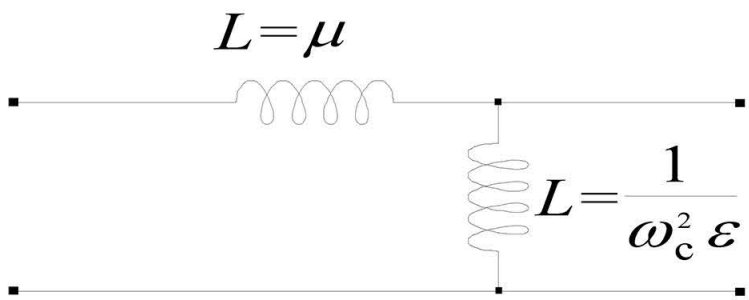


Figura 9.5 - Linea equivalente per $\omega < \omega_c$

che è un semplice attenuatore e non dà luogo a propagazione.

Naturalmente il circuito equivalente trovato è formato da parametri a costanti concentrate lineari e non dispersivi, anche se dipendono, come visto, da ω_c; ne segue che in una guida d'onda ad ogni modo corrisponde una linea equivalente.

Scegliamo ora la seconda formulazione ($\eta = 1\Omega$) e dalle (9.15) ricaviamo l'impedenza e l'ammettenza della linea equivalente.

$$Z = Y = K_z = j\beta_z = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \qquad (9.28)$$

Il circuito è quindi formato da una impedenza serie di natura induttiva ed un'impedenza parallelo di natura capacitiva $L = C = \sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}$

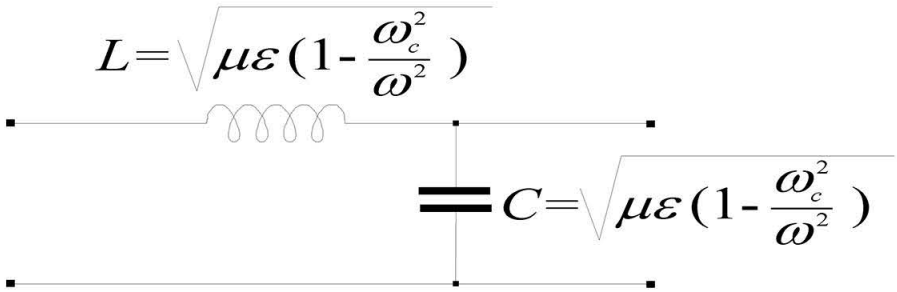


Figura 9.6 - Linea equivalente

Da notare che in questo caso il circuito presenta elementi di natura dispersiva, in quanto dipendono dalla frequenza ω. Si ponga l'attenzione sul fatto che se $\omega < \omega_c$ le Z e la Y divengono reali e sia l'induttanza che la capacità divengono resistenze (sempre dispersive) per cui la linea si comporta come un attenuatore e non dà luogo a propagazione. Pertanto, abbiamo trovato due diversi circuiti corrispondenti allo stesso modo ***TE*****,** in quanto hanno la stessa costante di propagazione, la stessa potenza transitante e le stesse caratteristiche di propagazione, ma diversi valori delle dell'impedenza η, data la sua arbitrarietà.

Troviamo ora le linee equivalenti per i modi ***TEM*** sempre in guida d'onda. Ricordando che l'impedenza d'onda è dato dalla (9.8):

$$K_t = 0; \quad K_z^2 = \left(j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right)^2$$

Dalla prima formulazione ($\eta = \eta_z$) risulta:

$$\begin{cases} Z = K_z\eta = j\omega\mu \\ Y = \frac{K_z}{\eta} = j\omega\varepsilon \end{cases} \tag{9.29}$$

Quindi il circuito equivalente per unità di lunghezza relativo al modo ***TEM*** è costituito da un'impedenza in serie di natura induttiva e da un'ammettenza parallelo di natura capacitiva:

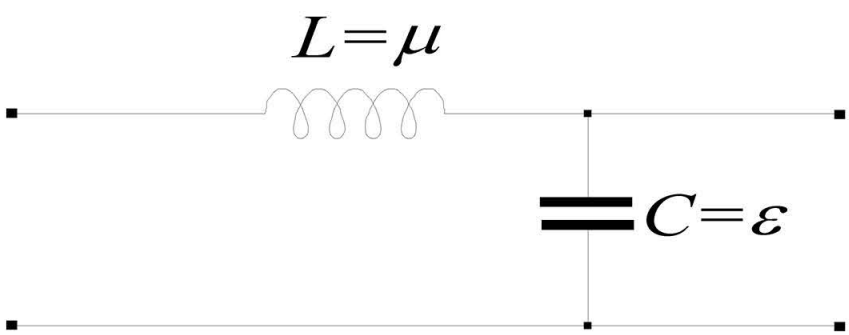


Figura 9.7 - Linea equivalente

Dalla seconda formulazione ($\eta=1$) risulta:

$$\begin{cases} Z = K_z\eta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \\ Y = \frac{K_z}{\eta} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \end{cases} \tag{9.30}$$

che equivale al circuito:

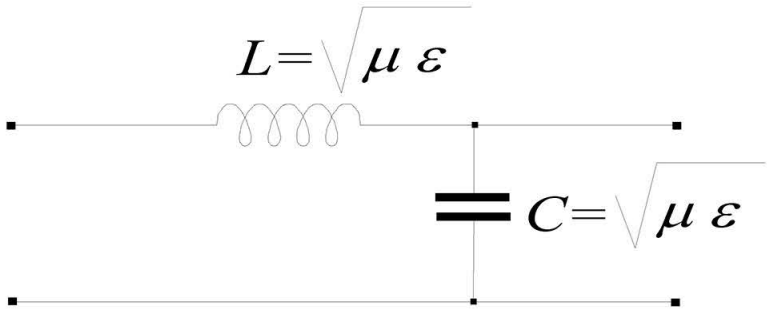


Figura 9.8 - Linea equivalente

Si ponga l'attenzione al fatto che per il modo ***TEM***, in entrambe le formulazioni, i parametri a costanti concentrate sono di tipo non dispersivo, inoltre la linea equivalente è sempre del LC e quindi da luogo sempre a trasmissione qualunque sia la frequenza. Tutto ciò conferma quanto studiato sui modi ***TE***, ***TM*** e ***TEM*** nel caso delle strutture a costanti distribuite, per le quali si erano trovate delle frequenze di cut-off (per il modo ***TEM*** la frequenza di cut-off è zero, quindi si ha propagazione a tutte le frequenze)[43]

Nel caso dell'onda ***TEM*** il circuito equivalente è lo stesso per qualsiasi struttura guidante considerata. Infatti, per i modi ***TE***, ***TM*** c'è la frequenza critica, legata all'autovalore e quindi alle condizioni al contorno della struttura, che ci fornisce indicazioni sulla geometria della struttura stessa. Per i ***TEM*** non c'è nessun parametro che caratterizza la struttura, d'altra parte si vede che non c'è neanche l'impedenza d'onda del modo. Comunque, nel caso di onde ***TEM*** è possibile dare una terza formulazione in cui intervengono le caratteristiche geometriche della struttura. Ricordiamo che erano state introdotte delle grandezze $V(z)$ e $I(z)$ per le linee equivalenti che non avevano, nel caso di modi ***TE*** e ***TM***, nessuna corrispondenza fisicamente misurabile sulla struttura guidante. Nel caso delle strutture guidanti onde ***TEM*** le grandezze $V(z)$ e $I(z)$ della linea equivalente sono

43 I circuiti presenti non vanno confusi con i filtri passa basso o passa alto, in quanto qui si considerano tratti di linea di lunghezza unitaria (quindi con grandezze definite per unità di lunghezza) per cui le proprietà sono quelle dell'equazione differenziale. Attenzione quindi a passare dal discreto al continuo.

legate a delle grandezze fisicamente misurabili, che sono rispettivamente la *d.d.p.* tra i conduttori guidanti il moto ***TEM*** e la corrente che vi scorre. Nel caso di onde ***TEM*** sappiamo che:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \varphi = 0 \\ \underline{e}_t = -\nabla_t \varphi \\ \underline{h}_t = \frac{1}{\eta_z}(\underline{z}_0 \times \underline{e}_t) \end{cases} \tag{9.31}$$

dove, risolta l'equazione di *Laplace*, si ricavano il campo elettrico e magnetico. Detti 1 e 2 i conduttori che sopportano il modo ***TEM***, si ha che l'integrale di linea tra i due conduttori risulta indipendente dal cammino e vale proprio la *d.d.p.* tra i due conduttori, cioè:

$$\int_{c_1}^{c_2} \underline{e}_t \cdot \underline{s}_0 \, ds = -\int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial f}{\partial s} \, ds = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{9.32}$$

Inoltre, si ha che la circuitazione del campo magnetico su una linea, che possiamo prendere coincidente con quella che delimita la sezione trasversa di uno dei due conduttori, risulta essere uguale alla corrente che percorre il conduttore stesso, cioè:

$$\oint_l \underline{t}_0 \cdot \underline{h}_t \, dt = \frac{1}{\eta_z} \oint_l \underline{t}_0 \cdot (\underline{z}_0 \times \underline{e}_t) \, dt = \frac{1}{\eta_z} \oint_l \underline{e}_t \cdot (\underline{t}_0 \times \underline{z}_0) \, dt = -\frac{1}{\eta_z} \oint_l \frac{\partial f}{\partial n} \, dt = I \tag{9.33}$$

Queste relazioni ci permettono di definire l'impedenza caratteristica η della linea equivalente come il rapporto tra la *d.d.p.* e la corrente I.

$$\eta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \eta_z \frac{\int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial f}{\partial s} \, ds}{\oint_l \frac{\partial f}{\partial n} \, dt} \tag{9.34}$$

In questa formulazione, contrariamente alle prime due, intervengono le dimensioni geometriche della struttura. In definitiva con questa formulazione e tramite le (9.29) posso trovare l'induttanza e la capacità della linea di trasmissione (dipendenti anch'esse dalla geometria della struttura)[44].

[44] φ_1, φ_2 ed I sono in generale funzioni di z. In questo caso φ_1, φ_2, I sono soluzione del problema trasverso, dove è stata dimenticata la legge di dipendenza secondo z. Inoltre, cosa ancora più importante, ho potuto scrivere l'impedenza η come rapporto tra tensione e corrente nell'ipotesi che nella struttura vi sia la sola onda progressiva, infatti in questo caso sia la tensione che la corrente variano con la stessa legge $e^{-K_z z}$ per cui nel rapporto se ne va. Nel caso di onde stazionarie ottengo invece una impedenza $Z(z)$ che non è quella caratteristica della linea.

10 Analisi Dei Circuiti A Microonde Con Metodi Matriciali

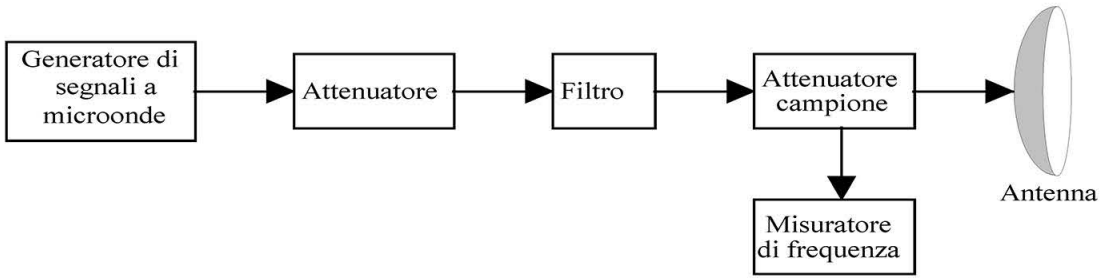


Figura 10.1 - Esempio di un sistema a microonde

Chiarito in che modo si possano risolvere problemi relativi alla propagazione in una struttura guidante con il metodo delle linee di trasmissione, passiamo ora a studiare strutture a microonde più complesse, costituite, in generale, dalla giunzione di più linee di trasmissione. Un classico esempio di sistema a microonde è quello illustrato in figura 10.1, dove ciascun blocco è un elemento a microonde.

In certi casi non è necessario fare lo studio accurato del campo elettromagnetico (cioè risolvere le equazioni di *Maxwell* punto per punto), infatti si può ricorrere a teorie più semplici, quali quelle viste nel capitolo precedente sulle linee di trasmissione (in cui la dipendenza trasversa dei campi viene trascurata). Alcune volte può essere sufficiente conoscere particolari caratteristiche di un elemento, a monte e a valle di esso. Questo studio può essere fatto utilizzando i risultati ottenuti mediante l'analisi con il metodo delle linee di trasmissione e osservando quanto otterremo dall'analisi dei circuiti a microonde con metodi matriciali. La struttura a microonde può essere considerata come un componente avente un certo numero di bocche. Molto importanti sono ad esempio i componenti a tre e quattro bocche classici dei circolatori e degli accoppiatori direzionali (componenti molto frequenti nelle tecniche a microonde) oppure quelli a sei bocche utilizzati nell'ambito di sistemi di misura. Per esempio, consideriamo un cavo coassiale che va ad alimentare una cavità risonante metallica di forma parallelepipeda (figura 10.2).

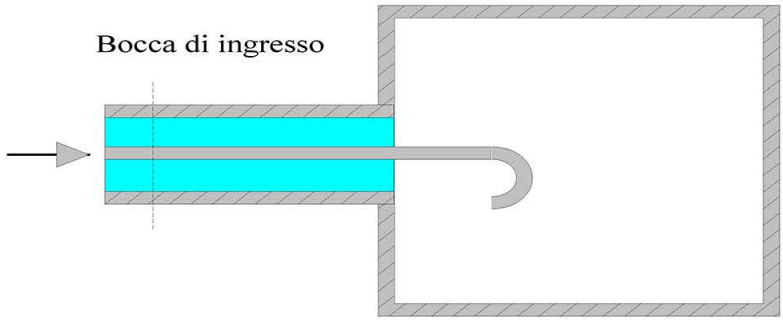


Figura 10.2 - Cavo coassiale che alimenta una cavità risonante

Se consideriamo l'insieme dei due dispositivi come una scatola di cui non si conosce il contenuto, possiamo pensare di fissare un piano un piano di riferimento sulla bocca di ingresso e studiare la struttura attraverso il comportamento alla bocca dei parametri tensione e corrente (si ricorda che tensione e corrente hanno significato fisico soltanto per strutture guidanti modi ***TEM***).

Prendiamo ora in esame una struttura guidante del tipo mostrato in figura 10.3 in cui una guida d'onda rettangolare presenta una discontinuità sul piano E.

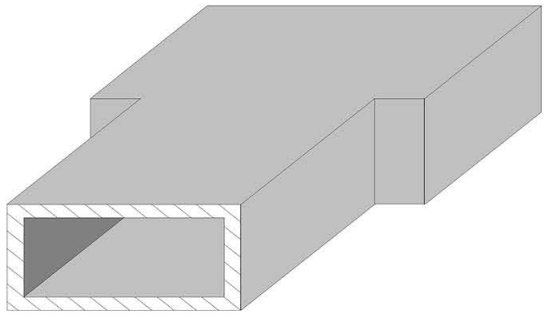


Figura 10.3 - Esempio di discontinuità in guida d'onda rettangolare

Dalla figura 10.4, in cui la stessa struttura è stata sezionata sul piano orizzontale, è possibile vedere la struttura guidante come un componente a due bocche che lega i parametri alla bocca 1 con quelli alla bocca 2.

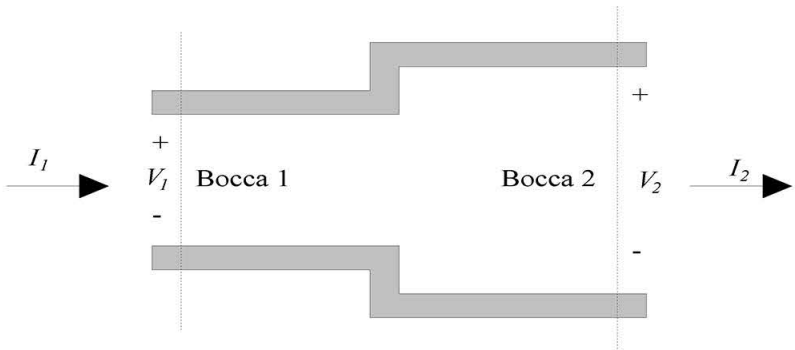


Figura 10.4 - Sezione trasversa di una discontinuità in guida

Pertanto, si può studiare come la discontinuità influenza le caratteristiche di propagazione in corrispondenza alle 2 bocche. Questo può essere fatto ricorrendo alla formulazione delle linee di trasmissione, cioè sostituendo alla struttura, la sua linea equivalente al modo che si propaga nella sezione 1 e quella equivalente al modo propagantesi nella sezione 2, determinando rispettivamente V_1, I_1 e V_2, I_2 con i metodi visti, definite sui due piani di riferimento. Estendendo il ragionamento a strutture ad n bocche (figura 10.5), il nostro problema sarà quello di determinare le relazioni tra tensioni e correnti alle n bocche.

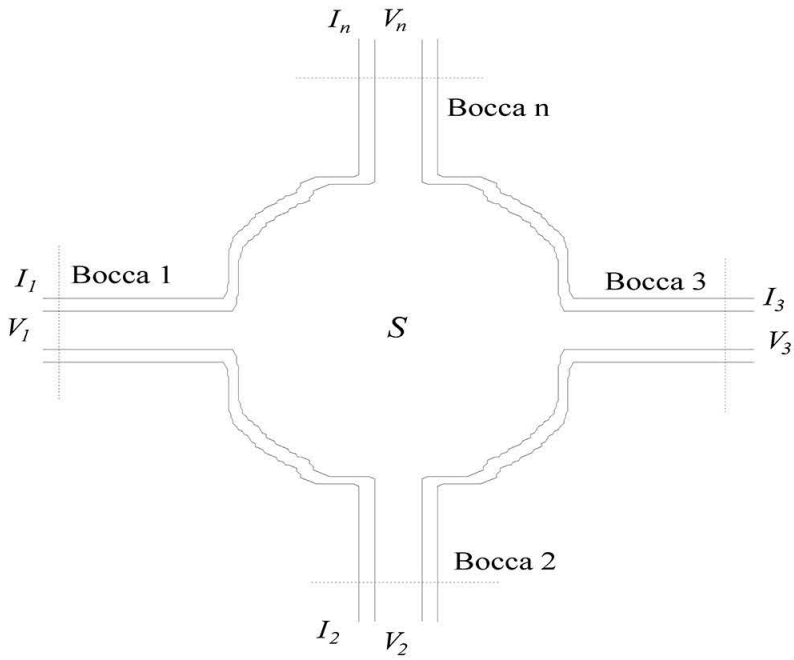


Figura 10.5 - Struttura ad n bocche

Consideriamo la struttura come un insieme di linee guidanti che trasportano energia. Nella teoria che andremo a sviluppare considereremo tutte le linee indipendenti tra loro sulle quali assumeremo la convenzione ormai nota di scegliere le correnti come entranti nella struttura. Ricordiamo che per il teorema di unicità, se in una superficie S chiusa non vi sono sorgenti (tratteremo per ora soltanto strutture passive), note le componenti tangenziali su S dei campi elettrico e magnetico è univocamente determinato il campo elettromagnetico in tutti i punti interni alla superficie stessa. Facciamo ora alcune considerazioni preliminari sulla scelta ottimale dei piani di riferimento sulle n bocche. Per poter applicare correttamente il principio delle linee di trasmissione dobbiamo supporre di essere su un tratto di linea sufficientemente lontano da qualsiasi discontinuità in modo

tale che tutti i modi di ordine superiore (che normalmente vengono eccitati dalle discontinuità) possano essere considerati sufficientemente attenuati (si ricorda che tali modi non sono in grado di propagarsi al di sotto della loro frequenza di cut-off, in quanto hanno una costante di propagazione reale e quindi si attenuano esponenzialmente rispetto al punto in cui vengono eccitati). In definitiva il modo fondamentale che si propaga lungo la linea, in corrispondenza della discontinuità eccita infiniti modi che procedono in entrambi i versi; comunque soltanto il modo fondamentale della struttura, aldilà della discontinuità stessa, sarà in grado di propagarsi. Supponiamo per esempio che nella figura 10.4 il modo fondamentale ***TE*** si propaghi attraverso la bocca 1 da sinistra verso destra. Come già detto sul piano π si formano infiniti modi che tendono a propagarsi sia verso destra che verso sinistra. Tra questi vi saranno sia il ***TE*** relativo alla struttura di sinistra che quindi forma un'onda riflessa (che ha le carte in regola per la propagazione verso sinistra), sia il modo ***TE*** relativo alla guida di destra che si propagherà verso destra (tutti gli altri modi si attenuano esponenzialmente). Si noti che i modi ***TE*** relativi alle due semiguide sono diversi in quanto lo sono le dimensioni trasverse. Quindi parleremo in seguito di linee equivalenti relative ad un solo modo, in quanto in una struttura guidante ogni modo ha una sua linea equivalente. In base a tali considerazioni appare evidente che la posizione del piano di riferimento va preso in un tratto di linea in cui vi sia una simmetria cilindrica, e per la quale sia univocamente determinato il modo propagantesi. Con queste precisazioni riusciamo a determinare dove non si deve trovare il piano di riferimento, che quindi ha a disposizione una delle infinite sezioni trasversali che si trovano sulle guide di ingresso. La scelta ottimale tra tutte queste va fatta in modo da semplificare le relazioni matriciali che legano tensioni e correnti alle bocche.

Torniamo a considerare la figura 10.5 applicandovi il teorema dell'unicità. Consideriamo la superficie S come una struttura metallica costituita da un certo numero di guide di accesso e da una struttura di raccordo. Ricordando ora che le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico sulle superfici metalliche sono nulle, le uniche componenti tangenziali sono quelle relative alle superfici di bocca. Quindi il campo elettromagnetico tangenziale sulle bocche è sufficiente per determinare in maniera univoca il campo elettromagnetico in qualsiasi punto interno alla struttura. Poiché i piani di riferimento S_i sono perpendicolari all'asse

delle strutture e quindi alla direzione di propagazione, la componente tangenziale del campo elettromagnetico coincide con le componenti trasverse del campo stesso in corrispondenza alle bocche. Assegnato $\underline{E_t}$ su tutte le bocche, restano univocamente determinate le componenti $\underline{H_t}$, ciò è equivalente ad assegnare sulla linea equivalente le tensioni $V(z)$ sulle porte, e conseguentemente restano individuate, una volta fissata l'impedenza η, le rispettive correnti $I(z)$, e viceversa. Tenuto conto dell'unicità della soluzione e della linearità della struttura posso stabilire delle relazioni tra tensioni e correnti del tipo matriciale:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \cdots + Y_{1n}V_n \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \cdots + Y_{2n}V_n \\ &\cdots \\ I_n &= Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \cdots + Y_{nn}V_n \end{aligned} \tag{10.1}$$

Che può essere sintetizzata nella seguente espressione:

$$[I] = [Y][V] \tag{10.2}$$

Dove $[I]$ è il vettore colonna delle correnti entranti.

$[V]$ è il vettore colonna delle tensioni alle bocche.

$[Y]$ è la matrice $n \times n$ detta delle ammettenze.

La matrice delle ammettenze risulta di tipo lineare ed è rappresentativa in maniera univoca della struttura in esame. Bisogna comunque fare attenzione in quanto risulta univoca una volta che sia stata fissata l'impedenza η e le posizioni delle varie bocche. I termini della matrice delle ammettenze possono essere determinati notando che sono definiti come:

$$Y_{ij} = \left.\frac{I_i}{V_j}\right|_{V_1=\cdots=V_n=0;\, V_j\neq 0} \tag{10.3}$$

che equivale ad applicare una tensione alla bocca j e misurare una corrente alla bocca i una volta cortocircuitate tutte le bocche tranne la j. Nelle tecniche a microonde cortocircuitare una bocca è equivalente a imporre la condizione $\underline{E_t} = 0$ sulla bocca stessa (vedi piano metallico perfetto).

In modo del tutto analogo si determina il legame univoco $V - I$ una volta che le grandezze impresse siano le correnti alle bocche:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \cdots + Z_{1n}I_n \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \cdots + Z_{2n}I_n \\ &\cdots \\ V_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \cdots + Z_{nn}I_n \end{aligned} \tag{10.4}$$

Che può essere sintetizzata nella seguente espressione:

$$[V] = [Z][I] \tag{10.5}$$

Dove $[Z]$ è la matrice $n \times n$ detta delle impedenze in cui ogni termine è definito come:

$$Z_{ij} = \left.\frac{V_i}{I_j}\right|_{I_1=\cdots=I_n=0;\, I_j\neq 0} \tag{10.6}$$

In questo caso si ha che Z_{11} rappresenta l'impedenza di ingresso alla bocca 1 quando tutte le altre bocche hanno una corrente nulla, cioè $\underline{H_t} = 0$. Nella tecnica a microonde tale condizione può essere ottenuta tramite un conduttore magnetico perfetto (elevata permeabilità magnetica), che comunque non risulta realizzabile fisicamente, con la conseguenza che occorre fare attenzione nel definire una struttura aperta. Una tratta di guida d'onda aperta nello spazio non realizza una condizione di circuito aperto in quanto tale bocca si trova nella condizione di irradiare energia elettromagnetica nello spazio. La conseguenza di tale discorso è che nella pratica la matrice $[Z]$ non viene mai ricavata tramite tecniche di misura data la sua scarsa importanza. Analogo discorso vale per la matrice delle ammettenze di corto circuito $[Y]$ in quanto la condizione di cortocircuito sulle bocche crea notevoli fastidi ai generatori di microonde che si trovano ad essere investiti da potenze riflesse di notevole entità. In definitiva si può dire che le condizioni di misura di queste matrici non sono affatto agevoli, ciò ha portato ad introdurre una nuova matrice, chiamata matrice di *Scattering*. Questa matrice lega grandezze che non sono esattamente le tensioni e le correnti viste fino ad ora, ma più propriamente le tensioni e le correnti incidenti e riflesse alle varie bocche, legate alle prime dalle relazioni:

$$\begin{aligned} V(z) &= V^i(z) + V^r(z) \\ I(z) &= I^i(z) + I^r(z) = [\eta]^{-1}\left[V^i(z) - V^r(z)\right] \end{aligned} \tag{10.7}$$

Dove $[\eta]$ è una matrice diagonale sul cui significato torneremo più avanti. La $V(z)$ è definita come la somma di una grandezza che rappresenta un'onda incidente (che viaggia nella direzione delle z positive) e un'altra che rappresenta un'onda riflessa. Quindi posso individuare i legami tra le grandezze alle varie bocche attraverso dei

differenti parametri. Normalmente per la matrice di Scattering vengono adottate delle simbologie diverse secondo le quali *"a"* e *"b"* sono le grandezze rispettivamente incidente e riflessa sul piano della bocca. Scegliendo l'origine $z = 0$ sul piano di bocca si ha:

$$V^i(0) = a; \qquad V^r(0) = b \tag{10.8}$$

Per strutture ad n bocche a e b saranno dei vettori colonna di n componenti.

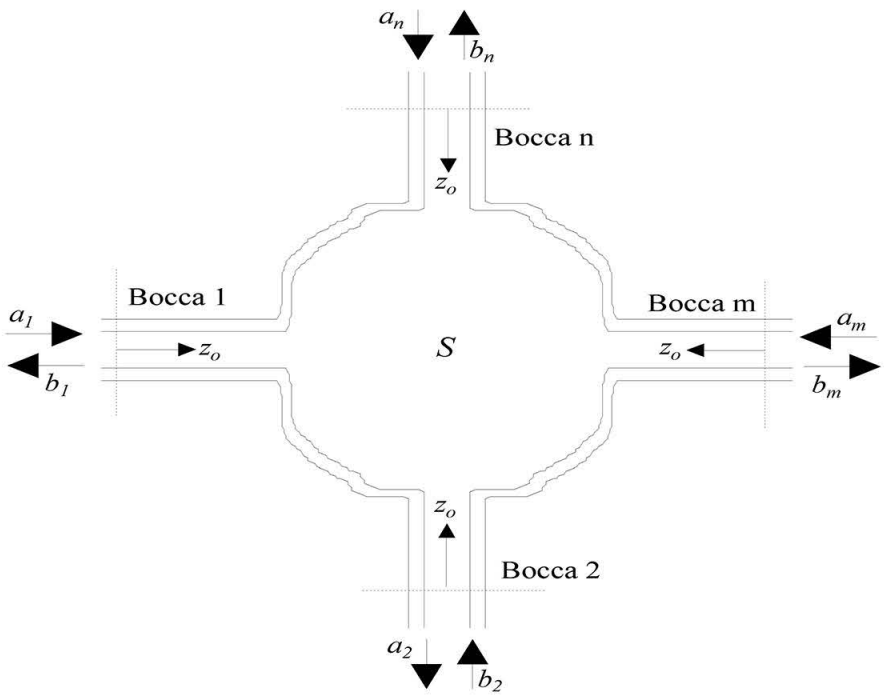


Figura 10.6 - Onde incidenti e riflesse alle bocche

Se consideriamo la struttura di figura 10.6, per il teorema di unicità e per la linearità della struttura, si ha, tra tensione incidente e riflessa, la seguente relazione:

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + \cdots + s_{1n}a_n \\ b_2 &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + \cdots + s_{2n}a_n \\ &\cdots \\ b_n &= s_{n1}a_1 + s_{n2}a_2 + \cdots + s_{nn}a_n \end{aligned} \tag{10.9}$$

Che può essere sintetizzata nella seguente espressione:

$$[b] = [S][a] \tag{10.10}$$

Dove $[S]$ è una matrice $n \times n$ detta di Scattering in cui ogni termine è definito come:

$$s_{ij} = \left.\frac{b_i}{a_j}\right|_{a_1=\cdots=a_n=0;\ a_j\neq 0} \tag{10.11}$$

Come si vede dalla (10.11) tutte le bocche tranne la j-esima devono avere le rispettive onde incidenti nulle. Sappiamo che nella tecnica a microonde questa condizione è facilmente ottenibile mediante l'adattamento delle bocche stesse.

Può risultare utile trovare le relazioni che legano le matrici $[Z]$ e $[Y]$ alla matrice di Scattering, prima comunque ricordiamo alcuni elementi di algebra matriciale:

$$[A][B] \neq [B][A] \tag{10.12}$$

$$([A][B])[C] = [A]([B][C]) \tag{10.13}$$

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \tag{10.14}$$

$$([A]^{-1})^T = ([A]^T)^{-1} \tag{10.15}$$

$$[A]^{-1}[A] = [1] \tag{10.16}$$

Riportiamo le relazioni matriciali definite in precedenza

$$\begin{gathered}[V] = [Z][I] \\ [I] = [Y][V] \\ [b] = [S][a]\end{gathered}$$

Tra la $[Z]$ e la $[Y]$ esiste la relazione:

$$[Z]^{-1}[V] = [I] \quad \Longrightarrow \quad [Z]^{-1} = [Y] \tag{10.17}$$

Tra la matrice $[Z]$ e la $[S]$, in base alle (10.7) si ha:

$$\begin{gathered}[V(z)] = \left[V^i(z)\right] + [V^r(z)] = [a] + [b] \\ [I(z)] = [\eta]^{-1}([a] - [b])\end{gathered} \tag{10.18}$$

Per la (10.5) si ha che:

$$[a] + [b] = [Z][I] = [Z][\eta]^{-1}([a] - [b]) \quad \Longrightarrow$$

$$([1] - [Z][\eta]^{-1})[a] = -([1] + [Z][\eta]^{-1})[b] \quad \Longrightarrow$$

$$[b] = ([1] + [Z][\eta]^{-1})^{-1}\,([Z][\eta]^{-1} - [1])[a] \quad \Longrightarrow$$

$$[S] = ([1] + [Z][\eta]^{-1})^{-1}\,([Z][\eta]^{-1} - [1]) \tag{10.19}$$

Pertanto, fissata la matrice $[\eta]$, tramite la conoscenza della matrice $[Z]$ posso risalire alla $[S]$ e viceversa.

Cerchiamo ora un'altra relazione che lega la matrice delle impedenze alla matrice di scattering. Ricavando $[b]$ dalla prima delle (10.18) e sostituendolo nella seconda si ottiene:

$$2[a] = [V] + [\eta][I] \tag{10.20}$$

Inoltre, ricavando $[a]$ dalla seconda delle (10.18) e sostituendola nella prima si ha:

$$2[b] = [V] - [\eta][I] \tag{10.21}$$

Se ora nella (10.20) e nella (10.21) sostituisco la (10.5) ottengo:

$$\begin{aligned} 2[a] &= ([Z] + [\eta])[I] \\ 2[b] &= ([Z] - [\eta])[I] \end{aligned} \tag{10.22}$$

Per la (10.10) e le (10.22) si ha allora:

$$([Z] - [\eta])[I] = [S]([Z] + [\eta])[I] \tag{10.23}$$

Dato che l'uguaglianza deve essere verificata qualunque sia il vettore $[I]$ si ottiene che:

$$([Z] - [\eta]) = [S]([Z] + [\eta]) \quad \Longrightarrow \quad [S] = ([Z] - [\eta])([Z] + [\eta])^{-1} \tag{10.24}$$

La (10.19) può essere riscritta nella forma:

$$[S] = ([Z] + [\eta])^{-1}\,[\eta]\,([Z] - [\eta])\,[\eta]^{-1} \tag{10.25}$$

Ora facciamo l'ipotesi restrittiva che la matrice diagonale $[\eta]$ abbia i termini tutti uguali. In tal caso la (10.25) diviene:

$$[S] = ([Z] + [\eta])^{-1}\,[\eta][\eta]^{-1}\,([Z] - [\eta]) = ([Z] + [\eta])^{-1}([Z] - [\eta]) \tag{10.26}$$

Chiamando con:

$$[a] = ([Z] - [\eta]); \quad [b] = ([\eta] + [Z])^{-1}$$

e confrontando le (10.24) e le (10.26) si nota che:

$$[S] = [a][b] = [b][a] \tag{10.27}$$

In generale questa proprietà non è vera, per cui è caratteristica della matrice di Scattering.

Facciamo ora la trasposta della (10.24). Ricordando la (10.14) e la proprietà che il trasposto di una somma è uguale alla somma dei trasposti e che $[\eta] = [\eta]^T$, si ha:

$$[S]^T = \{([Z] + [\eta])^{-1}\}^T([Z] - [\eta])^T = ([Z]^T + [\eta])^{-1}([Z]^T - [\eta]) \tag{10.28}$$

Se per ipotesi la matrice $[Z]$ è *simmetrica* ($[Z]^T = [Z]$):

$$[S]^T = ([Z] + [\eta])^{-1}([Z] - [\eta]) = [S] \tag{10.29}$$

pertanto, abbiamo ricavato che la matrice di scattering è simmetrica.

$$[S]^T = [S] \tag{10.30}$$

In conclusione, se la matrice delle impedenze è simmetrica e se la [η] *ha i termini diagonali tutti uguali, la matrice di Scattering è simmetrica*. Dal punto di vista fisico ciò consente di ridurre della metà le misure da effettuare sul sistema per determinare la $[S]$.

10.1 Strutture reciproche.

Torniamo per un attimo alla figura 10.6. Se all'interno del volume contenuto nelle superfici metalliche non ci sono mezzi anisotropi, la struttura ha un comportamento di tipo reciproco. Il teorema di reciprocità dei campi *e.m.* afferma che se abbiamo due sorgenti (che denomineremo rispettivamente con i pedici r, s) che generano due campi *e.m.* $\underline{E}_r, \underline{H}_r$ e $\underline{E}_s, \underline{H}_s$si ha che per ogni punto del volume in considerazione vale la relazione:

$$\nabla \left(\underline{E}_r \times \underline{H}_s - \underline{E}_s \times \underline{H}_r \right) \tag{10.31}$$

Dove $\underline{E}_r \times \underline{H}_s$ rappresenta il vettore di *Poynting* del campo elettrico generato dalla sorgente r e del campo magnetico generato dalla sorgente s (il termine $\underline{E}_s \times \underline{H}_r$ ha un significato analogo). Si noti che le sorgenti devono essere supposte esterne alla struttura in esame, che altrimenti non sarebbe più un componente passivo. Inoltre, il teorema di reciprocità continua a valere anche se il volume è non omogeneo. Vediamo ora come il teorema, che esprime punto per punto la relazione tra i campi *e.m.*, possa servire a ricavare delle leggi che legano le grandezze alle bocche di accesso della struttura.

Dato che la (10.31) è valida punto per punto, essa continua a valere anche se la integriamo nel volume Γ:

$$\int_\Gamma \nabla \left(\underline{E}_r \times \underline{H}_s - \underline{E}_s \times \underline{H}_r \right) d\Gamma = 0 \tag{10.32}$$

applicando il teorema della divergenza, l'integrale di volume si trasforma in un integrale calcolato sulla superficie S:

$$\oint_S \left(\underline{E}_r \times \underline{H}_s - \underline{E}_s \times \underline{H}_r\right) \cdot \underline{n}_0 \, dS = 0 \tag{10.33}$$

Dato che la superficie metallica è per ipotesi un conduttore perfetto il flusso di *Poynting* uscente dalla superficie metallica è nullo in quanto qui è nulla la componente tangenziale del campo elettrico. Quindi il flusso di potenza può essere diverso da zero soltanto in corrispondenza delle superfici di bocca. Se per esempio la nostra struttura ha 2 bocche contraddistinte con i pedici 1 e 2, l'integrale può essere spezzato come segue:

$$-\int_{S_{b1}} \left(\underline{E}_{1r} \times \underline{H}_{1s} - \underline{E}_{1s} \times \underline{H}_{1r}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b1} - \int_{S_{b2}} \left(\underline{E}_{2r} \times \underline{H}_{2s} - \underline{E}_{2s} \times \underline{H}_{2r}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b2} = 0 \tag{10.34}$$

Il segno meno davanti agli integrali è dovuto al fatto che $\underline{z}_0 = -\underline{n}_0$.

È da tenere conto che il flusso del campo *e.m.* che attraversa le bocche 1 e 2, è costituito dalla sola componente trasversa, per cui i campi della (10.34) in effetti sono le sole componenti trasverse:

$$-\int_{S_{b1}} \left(\underline{E}_{t1r} \times \underline{H}_{t1s} - \underline{E}_{t1s} \times \underline{H}_{t1r}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b1} - \int_{S_{b2}} \left(\underline{E}_{t2r} \times \underline{H}_{t2s} - \underline{E}_{t2s} \times \underline{H}_{t2r}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b2} = 0 \tag{10.35}$$

Se si varia l'eccitazione esterna, la configurazione del campo trasverso (che ricordiamo è legata ad un certo autovalore) rimane sempre la stessa, varieranno invece le grandezze che hanno una dipendenza dall'ascissa longitudinale, come $V(z)$ e $I(z)$. Per entrambe le situazioni (r,s), si può scrivere:

$$\underline{E}_{t(r,s)} = \underline{e}_t \, V(z)_{(r,s)}; \quad \underline{H}_{t(r,s)} = \underline{h}_t \, I(z)_{(r,s)} \tag{10.36}$$

Dove $\underline{e}_t$ ed $\underline{h}_t$ assumono lo stesso valore per le due situazioni (r,s) per quanto detto precedentemente. Sostituendo le (10.36) nella (10.35) si ha:

$$V_{1r} \, I_{1s} \int_{S_{b1}} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t1}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b1} - V_{1s} \, I_{1r} \int_{S_{b1}} \left(\underline{e}_{t1} \times \underline{h}_{t1}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b1}$$
$$+ V_{2r} \, I_{2s} \int_{S_{b2}} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t2}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b2} - V_{2s} \, I_{2r} \int_{S_{b2}} \left(\underline{e}_{t2} \times \underline{h}_{t2}\right) \cdot \underline{z}_0 \, dS_{b2} = 0 \tag{10.37}$$

È importante tenere conto che per ogni tipo di modo (per esempio il modo ***TM***) si ha che, se $\underline{E}_z$ è reale, $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ sono immaginari (oppure si verifica il viceversa), per cui

nella (1.20) la coniugazione su $\underline{H_t}$ può essere trascurata e gli integrali della (10.37) possono essere posti pari ad 1. In definitiva si ha:

$$V_{1r}\, I_{1s} - V_{1s}\, I_{1r} + V_{2r}\, I_{2s} - V_{2s}\, I_{2r} = 0 \tag{10.38}$$

Questa relazione è in effetti già nota da altri corsi (elettrotecnica) ed è la condizione di reciprocità. Vediamo quali implicazioni comporta la (10.38) sulla matrice delle ammettenze di corto circuito della struttura 2 bocche in esame.

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\, V_1 + Y_{12}\, V_2 \\ I_2 &= Y_{21}\, V_1 + Y_{22}\, V_2 \end{aligned} \tag{10.39}$$

Poiché sappiamo che questa matrice è indipendente dalle condizioni di eccitazione, possiamo scrivere:

$$[\boldsymbol{I}_{(r,s)}] \;=\; [\boldsymbol{Y}]\,[\boldsymbol{V}_{(r,s)}]$$

Sostituendo nella (10.38) si ha:

$$V_{1r}\,(Y_{11}\,V_{1s} + Y_{12}\,V_{2s}) - V_{1s}\,(Y_{11}\,V_{1r} + Y_{12}\,V_{2r}) + V_{2r}(Y_{21}\,V_{1s} + Y_{22}\,V_{2s}) - V_{2s}\,(Y_{21}\,V_{1r} + Y_{22}\,V_{2r}) = 0 \tag{10.40}$$

da cui:

$$Y_{12}V_{1r}V_{2s} - Y_{12}V_{1s}V_{2r} + Y_{21}V_{2r}V_{1s} - Y_{21}V_{2s}V_{1r} = 0 \tag{10.41}$$

quindi mettendo in evidenza le ammettenze:

$$Y_{12}(V_{1r}V_{2s} - V_{1s}V_{2r}) + Y_{21}(V_{2r}V_{1s} - V_{2s}V_{1r}) = 0 \tag{10.42}$$

$$Y_{12}(V_{1r}V_{2s} - V_{1s}V_{2r}) = Y_{21}(V_{2r}V_{1s} - V_{2s}V_{1r}) \tag{10.42b}$$

Dato che questa uguaglianza deve essere valida qualunque siano le situazioni r, s si ricava che:

$$Y_{12} \;= Y_{21} \tag{10.43}$$

Ovviamente le 2 bocche sono del tutto arbitrarie per cui esse possono rappresentare la i-esima e la j-esima bocca di una qualsiasi struttura ad n bocche in cui le altre n-2 siano state cortocircuitate. Quindi se il componente è reciproco si ha che la matrice delle ammettenze è simmetrica:

$$[Y] \;= [Y]^T \tag{10.44}$$

Ricordando che $[Z] = [Y]^{-1}$

$$[Z]^T = ([Y]^{-1})^T = ([Y]^T)^{-1} = [Y]^{-1} = [Z]$$

Quindi se la matrice ammettenze è simmetrica, lo è anche la matrice delle ammettenze, queste a loro volta risultano indipendenti da η.

La matrice di Scattering invece ne dipende, infatti dalla (10.24):

$$[S] = ([Z] - [\eta])([Z] + [\eta])^{-1}$$

con $[\eta]$ matrice diagonale.

Se $[\eta] \neq \eta[1]$ risulta che $[S] \neq [S]^T$.

Se invece la $[\eta] = \eta[1]$ (diagonale fittizia) risulta che se

$$[Z] = [Z]^T \implies [S] = [S]^T$$

Questo vuol dire che la $[S]$ dipende dalla particolare scelta della normalizzazione, ovvero da come definisco l'impedenza delle linee di accesso. Se per esempio abbiamo una struttura in cui una bocca è costituita da un cavo coassiale ed un'altra da una guida d'onda rettangolare e si è fissata la η_1 del cavo coassiale del modo ***TEM*** ed una η_2 della guida del modo TE_{11}, ci si trova nel caso in cui si abbiamo a che fare con due impedenze diverse (questo se si considera la formulazione $\eta = \eta_z$) che fa ottenere una matrice $[S]$ non simmetrica, anche se il componente è reciproco, quindi in definitiva la matrice $[S]$ gode della proprietà di simmetria se la struttura è reciproca e se la scelta delle η è la stessa su tutte le bocche (in particolare si può scegliere $\eta = 1$).

10.2 Dipendenza della [S] dalla scelta dei piani di bocca.

Abbiamo visto che le matrici $[Z], [Y]$ e $[S]$, che legano le tensioni e le correnti alle varie bocche, dipendono dalla scelta della posizione dei piani di riferimento. Riferiamoci alla struttura della figura 10.7.

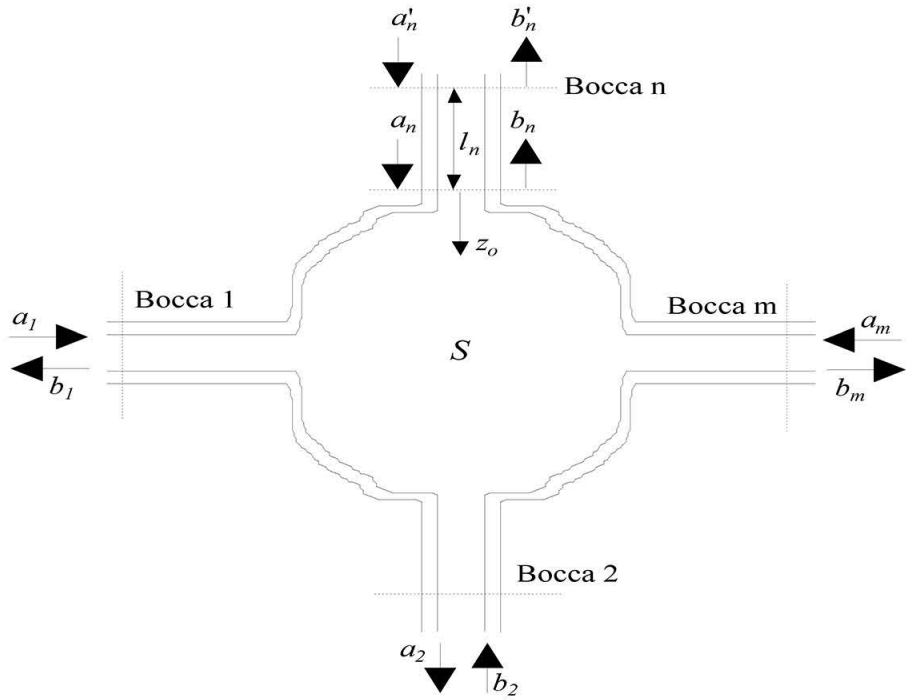


Figura 10.7 - Spostamento del piano della n-esima bocca

Il generico parametro di $[S]$ vale:

$$s_{n,m} = \left.\frac{b_n}{a_m}\right|_{a_i=0,\forall i\neq m}$$

Questo coefficiente risulta un coefficiente di trasferimento di potenza che rappresenta il rapporto tra quello che esce dalla bocca n e ciò che entra nella bocca m.

Ricordiamo che per strutture prive di perdite ($K_z = j\,\beta_z$) si ha:

$$V(z) = \sqrt{\eta}\left(P_1 e^{j\beta_z z} + P_2 e^{-j\beta_z z}\right)$$

Per la n-esima bocca:

$$a_n(z) = \sqrt{\eta_n}\, P_{2n} e^{-j\beta_{zn} z}$$
$$b_n(z) = \sqrt{\eta_n}\, P_{1n} e^{j\beta_{zn} z}$$

Supponiamo ora di poter traslare il piano di riferimento della bocca n di una quantità l_n nel verso delle z negative (cioè uscente) lasciando inalterate le posizioni degli altri piani. Le tensioni incidente e riflessa sul nuovo piano saranno:

$$\begin{aligned} a'_n(z) &= a_n(z - l_n) = a_n(z) e^{j\beta_{zn} l_n} = a_n(z) e^{j\theta_n} \\ b'_n(z) &= a_n(z - l_n) = b_n(z)\, e^{-j\beta_{zn} l_n} = b_n(z) e^{-j\theta_n} \end{aligned} \tag{10.45}$$

Per cui le nuove tensioni subiscono delle variazioni di fase pari a $\theta_n = \beta_{zn} l_n$(sempre nell'ipotesi di struttura priva di perdite.

Conseguentemente i parametri di Scattering varieranno nel seguente modo:

$$s'_{n,m} = \frac{b'_n}{a'_m} = \frac{b_n}{a_m}\, e^{-j\theta_n} = s_{n,m}\, e^{-j\theta_n}$$
$$s'_{m,n}(z) = \frac{b'_m}{a'_n} = \frac{b_m}{a_n}\, e^{-j\theta_n} = s_{m,n}\, e^{-j\theta_n}$$

Il parametro relativo alla stessa bocca risulterà invece:

$$s'_{n,n} = \frac{b'_n}{a'_n} = \frac{b_n}{a_n}\, e^{-j2\theta_n} = s_{n,n}\, e^{-j2\theta_n}$$

Ricordiamo ora alcune proprietà delle matrici diagonali del tipo:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Una generica matrice $[a]$ moltiplica per la $[D]$ può assumere le

forme:

$$[D][A] = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & \cdots & a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_n & a_{n2}d_n & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix}$$

$$[A][D] = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2}d_2 & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix}$$

Quindi questa proprietà risulta utile se si vuole generalizzare l'analisi fatta precedentemente, infatti spostando della stessa quantità e nella stessa direzione (o verso le z negative o verso quelle positive) tutte le bocche della struttura, ottengo una matrice di Scattering che può essere scritta come:

$$[S'] = [\theta][S][\theta]$$

Con

$$[\theta] = \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-j\theta_n} \end{bmatrix}$$

Si noti che gli elementi della diagonale principale di $[S']$ saranno moltiplicati per $e^{-j2\theta_i}$.

Teniamo presente che la matrice $[S]$ risulta già normalizzata avendo scelto la seconda formulazione con $\eta = 1$.

10.3 STRUTTURE SENZA PERDITE

Un'altra serie di strutture molto importanti sono i componenti senza perdite, per i quali la matrice $[S]$ assume delle forme particolari. D'ora in poi considereremo tutte le linee normalizzate ad impedenza unitaria. Sotto queste ipotesi, le potenze incidente e riflessa alla n-esima bocca della nostra struttura saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} W_{ni} &= \frac{a_n a_n^*}{2} \\ W_{nr} &= \frac{b_n b_n^*}{2} \end{aligned} \tag{10.46}$$

La potenza incide e riflessa totali saranno:

$$W_{nTot} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$
$$W_{nTot} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2$$

La potenza complessiva che entra nella struttura sarà data dalla somma algebrica delle due quantità:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} (|a_n|^2 - |b_n|^2)$$

Se a e b sono vettori colonna ad N componenti si ha:

$$[a]^{T*}[a] = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$
$$[b]^{T*}[b] = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2$$

per cui la potenza totale entrante sarà:

$$W = \frac{1}{2}([a]^{T*}[a] - [b]^{T*}[b]) \tag{10.47}$$

Sostituendo la (10.10) nella (10.47)

$$W = \frac{1}{2}([a]^{T*}[a] - [a]^{T*}[S]^{T*}\,[S][a]) \tag{10.48}$$

che dopo alcuni passaggi assume la forma:

$$W = \frac{1}{2}[a]^{T*}([1] - [S]^{T*}[S])[a] \tag{10.49}$$

Se il sistema è privo di perdite, evidentemente la potenza incidente totale deve essere uguali alla potenza riflessa totale, per cui la potenza totale entrante deve essere nulla. In base a questo ragionamento la (10.49) implica che:

$$([1] - [S]^{T*}[S]) = 0 \quad \Longrightarrow \quad [S]^{T*} = [S]^{-1}$$

Le matrici che godono di questa proprietà si chiamano *Matrici Unitarie*.

Questa proprietà risulta utile per stabilire delle facili relazioni tra i componenti. Ricordiamo che tutto ciò è scaturito dalla normalizzazione $\eta = 1$, se così non fosse stato avremmo avuto:

$$\begin{aligned} W_{ni} &= \frac{a_n a_n^*}{2\eta_i} \\ W_{nr} &= \frac{b_n b_n^*}{2\eta_i} \end{aligned} \tag{10.50}$$

Ricapitolando per una struttura ad N bocche la matrice di Scattering e quadrata $(N \times N)$, ad elementi complessi. Il numero di elementi reali che occorre determinare è $2N^2$ (Modulo e fase di ogni elemento).

Se la struttura è reciproca ne consegue una matrice $[S]$ simmetrica. Quindi il numero di elementi da determinare si riduce a:

$$2\left[N^2 - \frac{N(N-1)}{2}\right] = N^2 + N = N(N+1)$$

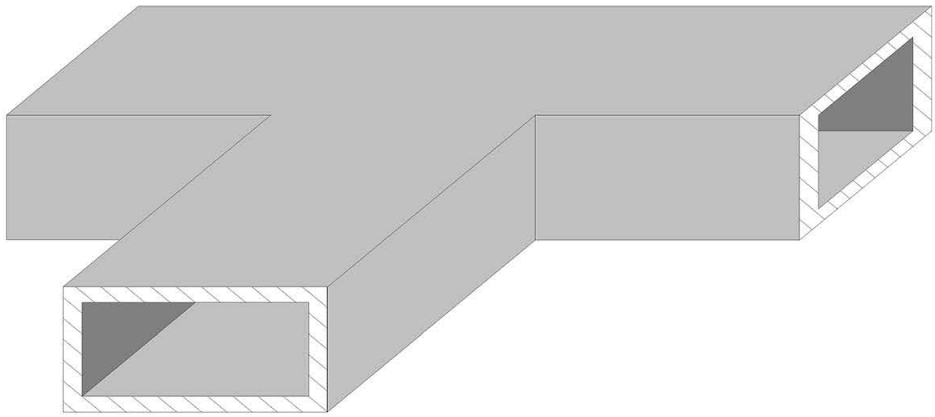


Figura 10.3 - Esempio di discontinuità in guida d'onda rettangolare

11 STRUTTURE AD UNA BOCCA

Iniziamo con l'applicare i risultati finora ottenuti per strutture generiche a più bocche, a strutture particolari ad una sola bocca del tipo in figura 11.1.

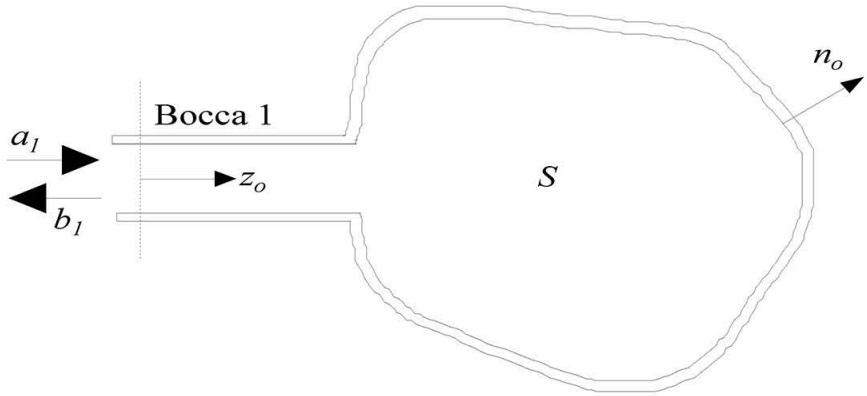


Figura 11.1 - Generica struttura ad una bocca.

Indichiamo con S la superficie totale che racchiude la struttura e con $\underline{n}_0$ la normale in ogni punto di essa. Esaminiamo il comportamento all'ingresso di tale struttura ricordando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} V &= Z_{in} I \\ I &= Y_{in} V \\ b &= s_{11} a = \Gamma_{in} a \end{aligned} \tag{11.1}$$

Dove Γ_{in} è il coefficiente di riflessione all'ingresso della bocca. Sappiamo inoltre che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} V &= a + b \\ V &= \frac{1}{\eta}(a - b) \end{aligned} \tag{11.2}$$

e quindi:

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \eta \frac{(a+b)}{(a-b)} = \eta \frac{(1+\Gamma_{in})}{(1-\Gamma_{in})} \tag{11.3}$$

Interpretiamo queste relazioni di ciò che avviene all'interno della struttura, in particolare considerando la legge di variazione dei campi *e.m.* di tipo armonico e applicando il teorema di *Poynting*, si ha:

$$\frac{1}{2}\int_S \left(\underline{E} \times \underline{H}^*\right) \cdot \underline{n}_0 \, dS = P_r + jP_i = P_e + 2j\omega(W_m - W_e) \tag{11.4}$$

Dove P_e è la potenza media dissipata in un periodo, all'interno del volume τ racchiuso in S, e $(W_m - W_e)$ è la differenza tra le energie medie magnetiche ed elettriche immagazzinate nel volume τ.

Ricordiamo che le espressioni per le energie medie sono:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{4}\int_\tau \mu\, \underline{H}\cdot\underline{H}^*\, d\tau \\ W_e &= \frac{1}{4}\int_\tau \varepsilon\, \underline{E}\cdot\underline{E}^*\, d\tau \end{aligned} \tag{11.5}$$

Quindi se consideriamo questa struttura come perfettamente conduttrice, segue che il flusso del vettore di *Poynting* attraverso tutta la superficie, è nullo (essendo nulla la componente tangenziale del campo elettrico su S) l'unica parte in cui il vettore di *Poynting* è diverso da 0 è quello in cui il flusso influisce attraverso la bocca di accesso (S_1).

Si ha pertanto:

$$\frac{1}{2}\int_{S_1}\left(\underline{E}_t \times \underline{H}_t^*\right)\cdot \underline{z}_0\, dS_1 = P_e + 2j\omega(W_m - W_e) \tag{11.6}$$

Ponendo in questa espressione:

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= V(z)\,\underline{e}_t \\ \underline{H}_t &= I(z)\,\underline{h}_t \end{aligned} \quad \text{se} \quad \eta = 1 \tag{11.7}$$

$$\frac{1}{2}V(z)I^*(z)\int_{S_1}\left(\underline{e}_t \times \underline{h}_t^*\right)\cdot \underline{z}_0\, dS_1 = P_e + 2j\omega(W_m - W_e) \tag{11.8}$$

Ricordando che dalla normalizzazione fatta in precedenza risulta:

$$\int_{S_1}\left(\underline{e}_t \times \underline{h}_t^*\right)\cdot \underline{z}_0\, dS_1 = 1 \tag{11.9}$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{2}V(z)I^*(z) = P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e) \tag{11.10}$$

Dove V e I sono le tensioni e le correnti alla bocca in un determinato punto z.

Questa relazione lega ciò che succede alla bocca con quello che accade all'interno della struttura. Inoltre, dalle (11.1) si ha:

$$\frac{1}{2}Z_{in}\, I(z)I^*(z) = \frac{1}{2}Z_{in}|I(z)|^2 = P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e) \tag{11.11}$$

Da cui:

$$Z_{in} = 2\frac{P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e)}{I(z)I^*(z)} = R_{in} + jX_{in} \tag{11.12}$$

Si ricavano le espressioni della resistenza di ingresso R_{in} e l'induttanza di ingresso X_{in}:

$$\begin{aligned} R_{in} &= \frac{2P_e}{I(z)I^*(z)} \\ X_{in} &= \frac{4\omega\,(W_m - W_e)}{I(z)I^*(z)} \end{aligned} \tag{11.13}$$

Oppure si ha la relazione:

$$\frac{1}{2}Y_{in}^*\, V(z)V^*(z) = \frac{1}{2}Y_{in}^*|V(z)|^2 = P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e) \tag{11.14}$$

Da cui essendo P_e e $(W_m - W_e)$ quantità reali, per ricavare Y_{in} posso fare il coniugato del primo e secondo membro, ottenendo:

$$\frac{1}{2}Y_{in}\, V(z)V^*(z) = P_e - 2j\omega\,(W_m - W_e) \tag{11.15}$$

e quindi

$$Y_{in} = 2\frac{P_e - 2j\omega\,(W_m - W_e)}{V(z)V^*(z)} \tag{11.16}$$

Si ricavano le espressioni della conduttanza di ingresso G_{in} e suscettanza di ingresso B_{in}:

$$\begin{aligned} G_{in} &= \frac{2P_e}{V(z)V^*(z)} \\ B_{in} &= \frac{4\omega\,(W_e - W_m)}{V(z)V^*(z)} \end{aligned} \tag{11.17}$$

Infine, tenendo conto delle (11.2) si può scrivere che:

$$\frac{1}{2}V(z)I^*(z) = \frac{(a+b)(a^* - b^*)}{2\eta} = P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e) \tag{11.18}$$

Che in base alla terza delle (11.1) diviene:

$$\frac{a(1+\Gamma_{in})a^*(1-\Gamma_{in}^*)}{2\eta} = \frac{aa^*[(1-|\Gamma_{in}|^2)+(\Gamma_{in}-\Gamma_{in}^*)]}{2\eta} = P_e + 2j\omega\,(W_m - W_e) \qquad (11.18b)$$

Si noti ora che aa^* e $(1-|\Gamma_{in}|^2)$ sono quantità reali mentre $(\Gamma_{in}-\Gamma_{in}^*)$ è una quantità puramente immaginaria, per cui confrontando termine a termine i due membri dell'uguaglianza si deduce che:

$$\frac{aa^*(1-|\Gamma_{in}|^2)}{2\eta} = P_e \qquad (11.19)$$

$$\frac{aa^*(\Gamma_{in}-\Gamma_{in}^*)}{2\eta} = 2j\omega\,(W_m - W_e) \qquad (11.20)$$

Questa suddivisione ci consente di ricavare dalla (11.19) che:

$$|\Gamma_{in}|^2 = 1 - \frac{2\eta\,P_e}{aa^*} \qquad (11.21)$$

e dalla (11.20) che:

$$|\Gamma_{in}|^2\left(e^{j\varphi_{in}} - e^{-j\varphi_{in}}\right) = j\frac{4\eta\omega(W_m - W_e)}{aa^*} \qquad (11.21b)$$

Da cui si ricava che:

$$\sin\varphi_{in} = \frac{2\eta\omega(W_m - W_e)}{|\Gamma_{in}|^2 aa^*} \qquad (11.22)$$

Abbiamo quindi ricavato il modulo e la fase del coefficiente di riflessione della bocca di ingresso.

Consideriamo casi particolari in cui la struttura priva di perdite in esame, non ha assorbimenti nell'interno, cioè con $P_e = 0$ (P_e è la potenza attiva, cioè la parte reale del flusso del vettore di *Poynting* che si va a dissipare non sulle pareti, che sono perfettamente conduttrici, ma all'interno della struttura se sono presenti degli assorbitori).

In questo caso particolare $P_e = 0$, per cui i parametri delle matrici $[Z], [Y]$ ed $[S]$ si semplificano e risultano:

$$[Z] \Longrightarrow \quad R_{in} = 0 \qquad X_{in} = \frac{4\omega\,(W_m - W_e)}{II^*}$$

$$[Y] \Longrightarrow \quad G_{in} = 0 \qquad B_{in} = \frac{4\omega\,(W_e - W_m)}{VV^*}$$

$$[S] \Longrightarrow \quad |\Gamma_{in}| = 1 \quad \sin\varphi_{in} = \frac{2\eta\omega(W_m - W_e)}{aa^*}$$

Queste sono le condizioni particolari per un circuito privo di perdite.

Analizziamo ora una condizione particolare delle strutture prive di perdite, che si verifica quando:

$$W_m = W_e$$

Cioè quando l'energia magnetica media immagazzinata nel volume τ è uguale all'energia elettrica immagazzinata nello stesso volume τ. Questa condizione si chiama risonanza. Analizziamo ora i due casi in cui questa condizione si verifica.

$$\begin{array}{lll} a)\ V = 0,\ I \neq 0 \implies a = -b & \text{Corto Cicuito} \\ b)\ V \neq 0,\ I = 0 \implies a = b & \text{Cicuito Aperto} \end{array}$$

Non possono esistere altri casi di risonanza, per esempio considerare contemporaneamente $V = 0$ e $I = 0$ in quanto ciò significherebbe che la struttura è isolata da tutto è quindi perderebbe ogni senso la discussione.

Consideriamo ora il caso a):

$$I \neq 0 \implies X_{in} = 0 \qquad \text{Vedi la (11.13) per } W_m = W_e$$

$$V = 0 \implies B_{in} = \infty \qquad \text{Vedi la (11.17) per } V = 0$$

$$|\Gamma_{in}| = 1 \qquad \varphi_{in} = 0 \text{ oppure } \pi$$

Queste condizioni sono dette di risonanza serie, ed il circuito equivalente è del tipo:

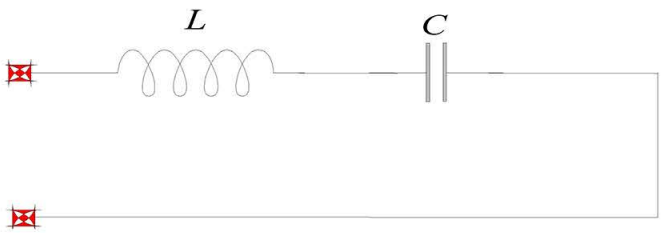


Figura 11.2 - Circuito LC serie.

Esaminiamo il caso b):

$$I = 0 \implies X_{in} = \infty \qquad \text{Vedi la (11.13) per } I = 0$$

$$V \neq 0 \implies B_{in} = 0 \qquad \text{Vedi la (11.17) per } W_m = W_e$$

$$|\Gamma_{in}| = 1 \qquad \varphi_{in} = \pi$$

Queste condizioni sono dette di risonanza parallelo (o Anti-risonanza), ed il circuito equivalente è del tipo:

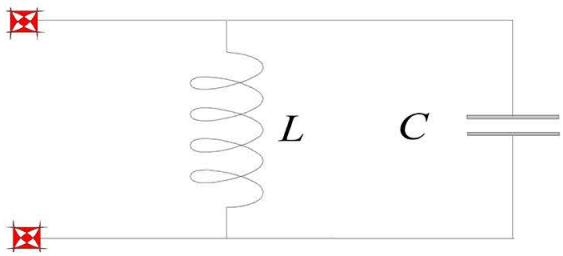


Figura 11.3 - Circuito LC parallelo.

Nel caso le strutture siano reali, e quindi siano presenti delle perdite i circuiti equivalenti divengono

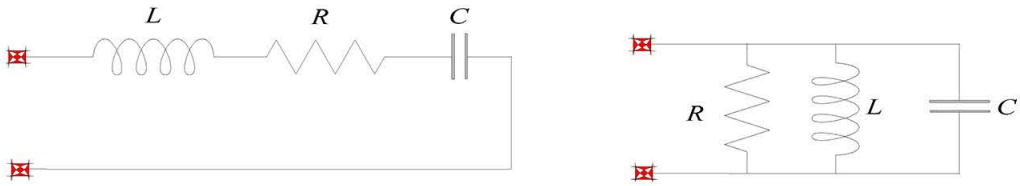


Figura 11.4 - Circuito LC serie e parallelo con perdite.

A rigore queste strutture non possono avere delle oscillazioni permanenti a frequenza reale, infatti nel circuito serie si ha:

$$V = I\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)$$

per cui con frequenze reali non è possibile avere $V = 0$ con $I \neq 0$. Si considerano pertanto delle oscillazioni smorzate all'ingresso del circuito equivalente con tensioni e correnti del tipo:

$$\begin{aligned} V(t) &= v\, e^{-\xi t}\sin(\omega t + \alpha) = Im\{v\, e^{j\alpha} e^{j\alpha(j\omega - \xi)t}\} \\ I(t) &= i\, e^{-\xi t}\sin(\omega t + \beta) = Im\{i\, e^{j\beta} e^{j\beta(j\omega - \xi)t}\} \end{aligned} \tag{11.23}$$

Introducendo la frequenza complessa $p = j\omega - \xi$ che fa corrispondere

un andamento temporale armonico e i fasori:

$$\begin{aligned} V(t) &= v\, e^{-\xi t}\sin(\omega t + \alpha) = Im\{v\, e^{j\alpha} e^{j\alpha(j\omega - \xi)t}\} \\ I(t) &= i\, e^{-\xi t}\sin(\omega t + \beta) = Im\{i\, e^{j\beta} e^{j\beta(j\omega - \xi)t}\} \end{aligned} \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned} V &= v\, e^{j\alpha} \qquad V(t) = Im\{V e^{pt}\} \\ I &= v\, e^{j\beta} \qquad I(t) = Im\{I e^{pt}\} \end{aligned}$$

Considerando il caso specifico del circuito serie abbiamo:

$$V(t) = R\, I(t) + L\,\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)\, dt$$

da cui:

$$V(t) = Im\{Ve^{pt}\} = Im\left\{R\ I\ e^{pt} + p\ L\ I\ e^{pt} + \frac{I\ e^{pt}}{p\ C}\right\}$$

eliminando la legge di dipendenza temporale si ottiene la seguente espressione fra le grandezze simboliche:

$$V = \left[R + pL\ + \frac{1}{pC}\right] I$$

A questo punto possiamo cercare una condizione per cui $V = 0$ per $I \neq 0$, e ciò si verifica quando si annulla l'impedenza, cioè:

$$R + pL\ + \frac{1}{pC} = 0$$

Cercare i possibili valori di p che soddisfano questa equazione significa trovare le frequenze delle oscillazioni naturali del sistema. L'equazione può essere posta nella forma:

$$p^2LC + pRC\ + 1 = 0$$

che ha come radici:

$$p = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Quindi le condizioni di oscillazione naturale smorzata si possono verificare quando è verificata la precedente relazione che equivale all'ipotesi di partenza se la quantità sotto radice risulta reale, cioè se:

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{R}{2L} \\ \omega = \pm\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2} \end{cases}$$

Quindi in questo circuito p è effettivamente complessa come avevamo supposto in partenza, mentre se:

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}} \\ \omega = 0 \end{cases}$$

che corrisponde ad un decadimento esponenziale nel tempo senza oscillazioni. Si può notare che se $R = 0$ la struttura è senza perdite e le equazioni precedenti si semplificano nelle:

$$p^2LC + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In questo caso pertanto p è immaginaria pura che corrisponde nel tempo ad una oscillazione naturale non smorzata. Quindi riassumendo nel caso generale, ponendo $\omega_0^2 = 1/(LC)$ e $\xi = R/(2L)$

si può scrivere che:

$$p = -\xi \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} = -\xi \pm j\omega_n \quad \text{con} \quad \omega_n = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\omega_0^2}}$$

rappresenta la frequenza di oscillazione naturale nel caso generale, mentre ω_0 rappresenta la frequenza di oscillazione per strutture prive di perdite.

Il caso di risonanza parallelo si può trattare in maniera analoga al caso serie, utilizzando le grandezze simboliche e ponendo $I = 0$ con $V \neq 0$ nella:

$$I = \left[G + pC + \frac{1}{LC}\right]V$$

da cui:

$$p^2LC + pLG + 1 = 0$$

che ha come radici:

$$p = -\frac{G}{2C} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

Ponendo $\xi = G/(2C)$ si ricava:

$$p = -\xi \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} = -\xi \pm j\omega_n \quad \text{con} \quad \omega_n = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\omega_0^2}}$$

L'espressione è analoga al caso serie solo che in questo caso ξ è diverso.

Vediamo ora come il caso limite di $R \to 0$ possa essere studiato da un altro punto di vista. Eravamo arrivati, nel caso di segnali di tipo armonico, alle relazioni:

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$$
$$R_{in} = \frac{2P_e}{I\,I^*}$$
$$X_{in} = \frac{4\omega\,(W_m - W_e)}{II^*}$$

Se facciamo l'ipotesi che attraverso la bocca della nostra struttura non ci sia un flusso netto di potenza, non posso avere la condizione di risonanza per una frequenza reale. Se ipotizzo invece che le perdite sono piccole (piccole potenze dissipate), posso avere delle oscillazioni a frequenza reale con:

$$Z_{in} \cong 0 \;\; se \;\; W_m = W_e \; e \;\; P_e \to 0$$

In definitiva si può vedere la condizione di risonanza come caso limite di due considerazioni:

1. Frequenza complessa, struttura con $Z_{in} \cong 0$ che da luogo a delle oscillazioni smorzate, se $\xi \to 0$ si hanno piccoli smorzamenti.
2. Frequenza reale, che dà luogo ad oscillazioni naturali permanenti, se le perdite sono piccole, per conservare queste oscillazioni occorre far fluire all'interno della struttura una certa potenza.

Questa duplice convergenza verso lo stesso limite ci consente di definire dei parametri che prescindono dalla teoria dei circuiti e risultano idonei alla trattazione delle strutture distribuite. per far ciò dobbiamo introdurre delle proprietà di tipo energetico.

Cominciamo a considerare il caso di strutture prive di perdite. Supponiamo che l'energia totale immagazzinata nel circuito privo di perdite sia data dalla somma dell'energia magnetica istantanea immagazzinata nell'induttanza e dell'energia elettrica istantanea immagazzinata nel condensatore:

$$W(t) = W_m(t) - W_e(t)$$

dove:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} L\, I_L^2(t)$$
$$W_e(t) = \frac{1}{2} C\, V_C^2(t)$$

In condizione di risonanza posso calcolare l'energia istantanea totale immagazzinata. Per condizione di risonanza si intende quella condizione che si verifica solo con la presenza di oscillazioni permanenti alla frequenza reale ω_0.

$$W(t) = \frac{1}{2} L\, I_L^2(t) - \frac{1}{2} C\, V_C^2(t) \qquad (11.24)$$

Nel caso serie:

$$I_L(t) = I(t) = i_0 \sin(\omega_0 t)$$
$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int I(t)\, dt = \frac{i_0}{C\omega_0}\cos(\omega_0 t)$$

sostituendo nella (11.24):

$$W(t) = \frac{L\, i_0^2}{2}\sin^2 \omega_0 t + \frac{i_0^2}{2C\omega_0^2}\cos^2(\omega_0 t)$$

Dato che siamo in condizioni di risonanza:

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad W(t) = \frac{L\, i_0^2}{2}[\sin^2 \omega_0 t + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{L\, i_0^2}{2}$$

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad W(t) = \frac{C\, v_0^2}{2}[\sin^2 \omega_0 t + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{C\, v_0^2}{2}$$

Quindi in condizioni di risonanza, la $W(t)$ è una quantità che non varia nel tempo, pari all'energia immagazzinata nell'induttore o nel condensatore nell'istante in cui essa è massima. Quindi il valore medio in un periodo di $W(t)$ coincide con il valore costante trovato. In definitiva l'energia istantanea totale immagazzinata nella struttura, in condizioni di risonanza, coincide con il suo valore medio. Si tenga conto che un risultato analogo si ottiene nel caso di risonanza parallelo. È interessante vedere cosa accade dal punto di vista energetico nel caso di circuiti con perdite, si vedrà che in questo caso occorre introdurre degli opportuni parametri. Ricordiamo che nel caso di risonanza ($V = 0, I \neq 0$ oppure $I = 0, V \neq 0$) a frequenze reali, condizioni che si possono avere a frequenze complesse, cioè quelle che abbiamo chiamato frequenze naturali di oscillazione e definite dalla relazione:

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\omega_0}\right)^2}$$

dove ω_n è la parte immaginaria di una frequenza complessa $p = j\omega_n - \xi$. Passando alle considerazioni energetiche nel caso di strutture con perdite, con riferimento ai circuiti illustrati in figura (11.4) si ha:

$$V(t) = v\, e^{-\xi t} \sin(\omega t + \alpha) = Im\{v\, e^{j\alpha} e^{j\alpha(j\omega - \xi)t}\}$$
$$I(t) = i\, e^{-\xi t} \sin(\omega t + \beta) = Im\{i\, e^{j\beta} e^{j\alpha(j\omega - \xi)t}\}$$

Dove ξ assume due diversi valori a seconda che si tratti di struttura serie o parallelo:

$$\xi s = \frac{R}{2\,L}$$
$$\xi p = \frac{G}{2\,C}$$

Vediamo in questo caso che l'energia totale istantanea è data da:

$$W(t) = V(t)I(t) = v\, i\, e^{-2\xi t} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta) \qquad (11.25)$$

Notiamo subito che $W(t)$ risulta una quantità che varia nel tempo, e non è costante come nel caso privo di perdite, in particolare l'ampiezza si smorza secondo il termine esponenziale del tipo $e^{-2\xi t}$. Vediamo ora quali approssimazioni si possono fare nel caso le strutture presentino delle perdite molto piccole, in modo da avvicinarsi ai concetti esposti per strutture senza perdite. Facciamo l'ipotesi di quantizzazione del decremento di ampiezza che presenta l'energia dopo un periodo, e supponiamo che in tale periodo l'energia resti una quantità costante. Quindi la sinusoide decrescente in ampiezza secondo la legge esponenziale può essere sostituita con una serie di gradini di larghezza pari al periodo T, e di ampiezza decrescente.

$$\omega_n = \omega_0; \qquad p = j\omega_0 - \xi$$

Studiamo ora la struttura in funzione del coefficiente di risonanza Q che risulta più idoneo a caratterizzare le perdite elettromagnetiche:

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_e} \qquad (11.26)$$

ω_0 ⇒ Pulsazione di risonanza della struttura ideale priva di perdite.

W ⇒ Energia media immagazzinata in un periodo, che è un valore costante (nonostante $W(t)$ vari nel tempo).

P_e ⇒ Potenza media dissipata in un periodo (anch'essa variabile)

Poiché Q deve essere un parametro indipendente dal tempo (affinché la sua definizione abbia un senso) è essenziale far riferimento ad un periodo ben definito T_0 nel quale W e P_e rimangano costanti. Con l'approssimazione fatta in precedenza per piccole perdite (quantizzazione di W e P_e) è possibile usare la (11.26) in ogni periodo T_0 in cui W e P_e sono assunte costanti.

$$P = \int W(t)dt\,; \qquad P_e = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} W(t)dt$$

Se considero $W(t)$ costante in un periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$ in quello successivo ho:

$$W(t+T_0) = V(t)I(t) = v\,i\,e^{-2\xi t}e^{-2\xi T_0}\sin(\omega t+\alpha)\sin(\omega t+\beta) = W(t)\,e^{-2\xi T_0} \quad (11.26b)$$

Il decremento di energia è pertanto:

$$W(t+T_0) - W(t) = W(t)\left(1 - e^{-2\xi T_0}\right) \qquad (11.26c)$$

Se le perdite sono piccole ($\xi \Rightarrow 0$) posso sostituire l'esponenziale con il suo sviluppo in serie troncato al secondo termine $e^x \cong 1 + x$, pertanto:

$$W(t+T_0) - W(t) = 2\,\xi\,T_0\,W(t)$$

Introduciamo ora il decremento logaritmico nel seguente modo:

$$\ln(2\delta) = \ln\left[\frac{W(t+T_0)-W(t)}{W(t)}\right] = \ln(2\,\xi\,T_0) \;\Rightarrow \delta = \xi\,T_0$$

Ciò consente di legare la diminuzione di energia, che si verifica tra il primo ed il secondo periodo, con la potenza dissipata, infatti nel circuito privo di perdite $W(t)$ è costante e $P_e = 0$, mentre in quello con perdite c'è un decremento di $W(t)$ e una dissipazione di energia che è pari alla potenza media P_e moltiplicata per il periodo di osservazione:

$$W(t+T_0) - W(t) = 2\,\xi\,T_0\,W(t) = P_e T_0 \quad \Rightarrow \quad P_e = 2\,\xi\;W(t)$$

in base a questa ultima relazione la (11.26) diviene:

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_e} = \frac{\omega_0}{2\,\xi} = \frac{\omega_0}{2\delta\,f_0} = \frac{\pi}{\delta} \qquad (11.26d)$$

quindi:

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

Notiamo che se per esempio $Q = 10$ si commette all'incirca un errore di uno per mille nel considerare $\omega_n = \omega_0$. Però ciò non significa che l'impedenza di ingresso Z_{in} sia

una quantità puramente immaginaria. Vediamo ora come la $Z_{in}(p)$ varia in corrispondenza della risonanza. Nel caso serie si ha:

$$\xi = \frac{R}{2\,L} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}; \quad Q = \frac{1}{\omega_0\, CR}$$

Dato che $Z_{in}(p) = R + pL + 1/(pC)$ si ottiene:

$$Z_{in}(p) = R\left[1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)\right]$$

In vicinanza della frequenza di risonanza, per circuiti a basse perdite ($\xi \to 0$), sia ha che $\omega_n \cong \omega_0$ e $p \cong j\omega$, per cui:

$$Z_{in}(\omega) = R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

Per $\omega = \omega_0$ si ottiene che $Z_{in}(\omega) = R$ quindi l'impedenza di ingresso è puramente reale. Analogamente per il circuito parallelo, essendo:

$$\xi = \frac{G}{2\,C} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 C}{G}; \quad Q = \frac{1}{\omega_0\, LG}$$

Dato che $Y_{in}(p) = G + pC + 1/(pL)$ si ottiene:

$$Y_{in}(p) = G\left[1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)\right]$$

che in prossimità della risonanza da $Z_{in} = 1/G$.

Facciamo un breve riepilogo e ricordiamo brevemente le condizioni di risonanza per le strutture a microonde ad una bocca.

1. Strutture prive di perdite. Il comportamento della struttura è caratterizzato da due parametri:
   - ω_0 - Frequenza di risonanza
   - $W(t) = W_e(t) - W_h(t)$ costante

la conoscenza dei due parametri è sufficiente alla individuazione del circuito equivalente LC.

2. Strutture con perdite. In questo caso sono necessari i seguenti parametri:
   - ω_0 - Frequenza di risonanza per la struttura senza perdite
   - Coefficiente di risonanza $Q = \pi/\delta$
   - Impedenza di ingresso Z_{in}

anche in questo caso è possibile risalire al circuito RLC della linea equivalente.

12 CAVITÀ RISONANTI

Una struttura a microonde che lavora alla frequenza di risonanza $f_0 = 2\pi\omega_0$ prende il nome di cavità risonante. Queste possono assumere forme diverse ma le più semplici sono quelle ricavate da tratti di linee di trasmissione. Inizieremo lo studio considerando strutture prive di perdite caratterizzate dai parametri ω_0 e $W(t)$. Consideriamo una struttura guidante asimmetria cilindrica qualsiasi chiusa con due piatti metallici ***PEI*** perpendicolari alla direzione di propagazione, come mostrato in fig. 12.1.

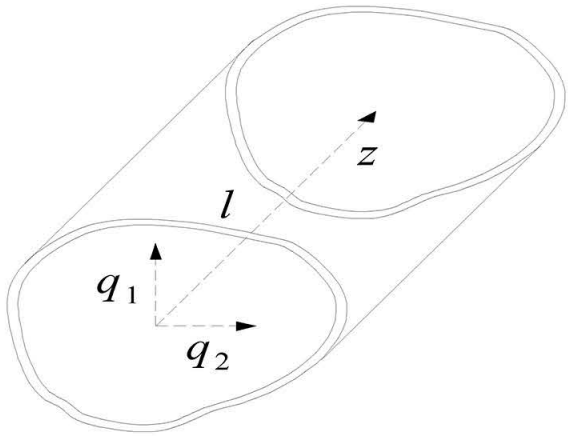


Figura 12.1 - Esempio di una cavità risonante a simmetria cilindrica.

Vediamo ora come può essere impostato il calcolo della frequenza di risonanza per una struttura a simmetria cilindrica, indipendentemente (per ora) dalla forma della sezione trasversa. In generale il campo trasverso è del tipo:

$$\underline{E}_t = \underline{e}_t(q_1, q_2)\left[P_1\, e^{j\beta_z z} + P_2\, e^{-j\beta_z z}\right] \tag{12.1}$$

La posizione dei piani non influenza il campo $\underline{e}_t(q_1, q_2)$ in quanto questo è soluzione del problema trasverso. Comunque, su questi piani ***PEI*** deve essere soddisfatta la ben nota condizione al contorno:

$$\underline{E}_\tau = \underline{E}_t = 0, \qquad per\ z = 0, z = l$$

Si noti che è stato scelto un sistema di riferimento con l'origine su uno dei due piani. Affinché la condizione sia verificata deve essere:

$$P_1\, e^{j\beta_z z} + P_2\, e^{-j\beta_z z} = 0, \qquad per\ z = 0, z = l$$

Per $z = 0 \;\Rightarrow\; P_1 + P_2 = 0 \;\Rightarrow\; P_1 = -P_2$ quindi:

$$-P_2\, e^{j\beta_z z} + P_2\, e^{-j\beta_z z} = -P_2\left[e^{j\beta_z z} - e^{-j\beta_z z}\right] = -2jP_2 \sin(\beta_z z)$$

Per $z = l \;\Rightarrow -2jP_2\, sen(\beta_z l) = 0 \;\Rightarrow sen(\beta_z l) = 0$ che è verificata per $\beta_z l = s\pi$ con $s = 0,1,2,3 \ldots$, quindi si ha:

$$\beta_z = \frac{s\pi}{l}, \qquad s = 0,1,2,3 \ldots \tag{12.1b}$$

Si noti che in una guida d'onda infinita la costante β_z era funzione di ω mentre ora dipende dalla lunghezza della cavità. Dato che per strutture di perdite si ha che $K_z = j\beta_z$, ricordando il legame con il K_t si ha:

$$K_t^2 + K_z^2 = K_t^2 - \beta_z^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \tag{12.2}$$

Se ora impongo che il β_z possa assumere soltanto i valori espressi dalla (12.1b) ottengo:

$$K_t^2 - \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 = -\omega_0^2\mu\varepsilon \tag{12.3}$$

Dove la frequenza ω assume soltanto valori discreti che sono le frequenze di risonanza ω_0 (su ω_0 di regola sarebbe necessario un pedice s per indicare la dipendenza da questa variabile)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 - K_t^2} \tag{12.4}$$

dove K_t^2 è un termine reale negativo dipendente dalla forma della sezione trasversa.

12.1 Risonatore a sezione rettangolare

Nel caso in cui la sezione sia rettangolare di lati a, b come in fig. 12.2,

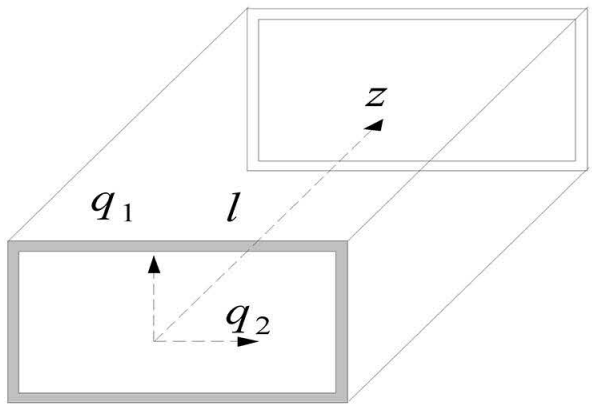


Figura 12.2 - Esempio di una cavità risonante.

per i modi ***TM*** o ***TE*** si ha:

$$-K_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Per cui:

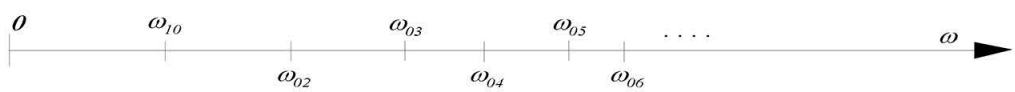
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{12.5}$$

Le variabili intere m, n, s sono i numeri d'onda. Quello che emerge immediatamente da questa espressione è che esistono un'infinità di frequenza di risonanza (∞^3).

Ad ogni frequenza di risonanza corrisponde una configurazione spaziale del campo *e.m.* diverso. A tutti questi modi può essere dato un ordine in base alla frequenza ω_0, vediamone alcuni.

Ricordiamo che per il modo ***TE*** gli indici m, n non devono essere contemporaneamente nulli, per cui non esiste il TE_{00s}.

Inoltre, se $s = 0$, assumendo una dipendenza longitudinale del tipo $\sin\left(\frac{s\pi}{l}z\right)$, non si ha campo per cui questa soluzione perde di significato. Si deduce quindi che soltanto uno dei tre pedici può essere nullo. Nel caso dei modi ***TM*** i pedici m, n non possono essere mai nulli, pertanto solo s può assumere valore nullo (in questo caso s può essere nullo, in quanto sulle superfici metalliche c'è la componente longitudinale $\underline{e}_z$). In definitiva abbiamo visto che nei modi ***TE*** e ***TM*** uno solo dei tre indici può essere nullo. Analogamente al caso delle linee di trasmissione, anche nelle cavità risonanti, ad ogni modo corrisponde una determinata linea equivalente del tipo LC. É possibile disporre su un asse delle frequenze, in ordine crescente, tutte le frequenze di risonanza della cavità. Nel caso della cavità a sezione rettangolare ottengo per esempio:



Si noti come le frequenze aumentano all'aumentare degli indici e inoltre tendono ad avvicinarsi sempre più tra loro. Anticipiamo ora un'osservazione e cioè che nel caso di strutture con perdite non conviene lavorare con modi molto vicini tra loro in quanto ciò causerebbe la loro eccitazione. Questo è un fenomeno che in generale deve essere evitato per motivi che analizzeremo in seguito.

12.2 RISONATORE CILINDRICO.

Consideriamo il caso del risonatore cilindrico che nella pratica è utilizzato più di quello rettangolare.

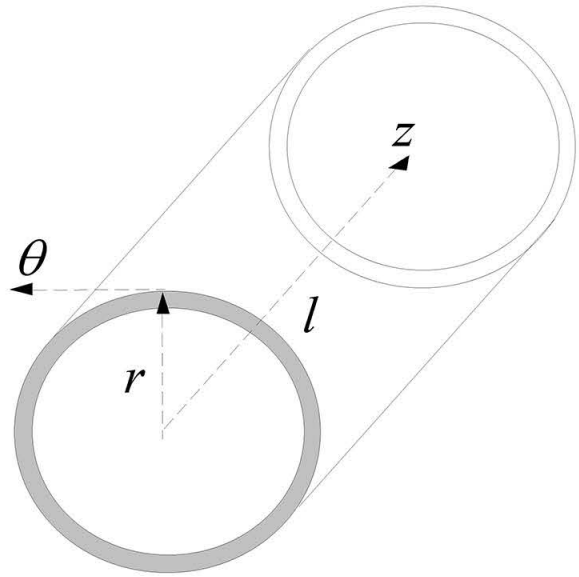


Figura 12.3 - Risonatore circolare.

Per i modi ***TE*** abbiamo:

$$-K_t^2 = \left(\frac{\xi'_{m,n}}{a}\right)^2 \qquad (12.6)$$

Dove $\xi'_{m,n}$ è n-esimo zero della derivata della ***F.d.B.*** di ordine m (la tabella dei valori è riportata nei capitoli precedenti), quindi dalla (12.4) si ha:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\xi'_{m,n}}{a}\right)^2}, \quad m = 0,1,2,\ldots; \quad n = 0,1,2,\ldots; \quad s = 1,2,3,\ldots \qquad (12.7)$$

Per i modi ***TM*** abbiamo invece che:

$$-K_t^2 = \left(\frac{\xi_{m,n}}{a}\right)^2 \qquad (12.8)$$

Dove $\xi_{m,n}$ è n-esimo zero della ***F.d.B.*** di ordine m (la tabella dei valori è riportata nei capitoli precedenti), per cui sempre dalla (12.4) otteniamo:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{m,n}}{a}\right)^2}, \quad m = 1,2,3,\ldots; \quad n = 0,1,2,\ldots; \quad s = 1,2,3,\ldots \qquad (12.9)$$

Un modo semplice e comodo per aiutare il progettista nel vedere come varia la frequenza di risonanza è la carta dei modi dei risonatori a cavità cilindrici. Questa, in maniera analoga al risonatore rettangolare, si costruisce ordinando in modo crescente tutte le frequenze di risonanza ω_0. Vediamo di scrivere in maniera compatta le (12.7) e le (12.8):

$$\omega_0^2 \mu\varepsilon = \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 + \begin{cases} \left(\frac{\xi'_{m,n}}{a}\right)^2 & TE \\ \left(\frac{\xi_{m,n}}{a}\right)^2 & TM \end{cases} \tag{12.10}$$

Moltiplicando tutto per a^2:

$$\omega_0^2 \mu\varepsilon a^2 = \left(\frac{s\pi a}{l}\right)^2 + \begin{cases} \left(\xi'_{m,n}\right)^2 & \text{TE} \\ \left(\xi_{m,n}\right)^2 & \text{TM} \end{cases} \tag{12.11}$$

La carta dei modi è un diagramma sulle cui ascissa c'è il rapporto $(2\pi a/l)^2$ e sulle ordinate c'è la quantità $\omega_0^2 \mu\varepsilon a^2$ (o una quantità ad essa proporzionale). Quindi tracciando una retta verticale passante per l'ascissa $(D/l)^2$ possiamo trovare immediatamente come sono ordinati i modi. Per (a/l) tendente a zero (risonatore lungo) nella (12.10) si semplifica il primo termine a secondo membro, per cui le ordinate tendono agli zeri $\xi'_{m,n}$ e $\xi_{m,n}$. Riportiamo una tabella contenente i primi modi ordinati:

N	Modo	Zero
1	TE_{11}	1.841
2	TM_{01}	2.405
3	TE_{21}	3.054
4	TE_{01} TM_{11}	3.832
5	TM_{21}	5.133

Si possono quindi trasferire i valori di questi punti sull'asse delle ordinate, usando le parentesi quadre per indicare i modi ***TE***, e le parentesi tonde per i modi ***TM***. Si ricorda che gli zeri $\xi'_{m,n}$ coincidono con i massimi e i minimi della funzione di Bessel di ordine m. Al variare del rapporto $(2a/l)^2$ abbiamo una serie di rette la cui pendenza è funzione dell'indice s, infatti le rette che hanno lo stesso s sono tutte parallele tra loro (in particolare per i modi ***TM*** può essere $s = 0$, per cui le rette sono orizzontali). Esistono dei modi detti degeneri che sono caratterizzati dal fatto che pur avendo diverse configurazioni di campo hanno la stessa frequenza di risonanza per tutti i valori di $(2a/l)$, quindi sulla carta dei modi sono identificati da una stessa

retta. Esistono dei modi che sono invece chiamati interferenti in quanto le loro curve di accordo si intersecano in un punto. Questo vuol dire che per un determinato rapporto $(2a/l)$ si possono avere più configurazioni di campo con la stessa frequenza di risonanza, dando luogo a delle spurie che come abbiamo già detto sono in generale da evitare. Nel caso di risonatori lunghi $(2a/l \to 0)$ il modo che presenta la frequenza di risonanza più bassa (detto anche modo dominante) è il [111] mentre nel caso di risonatori corti il modo dominante diviene il (010).

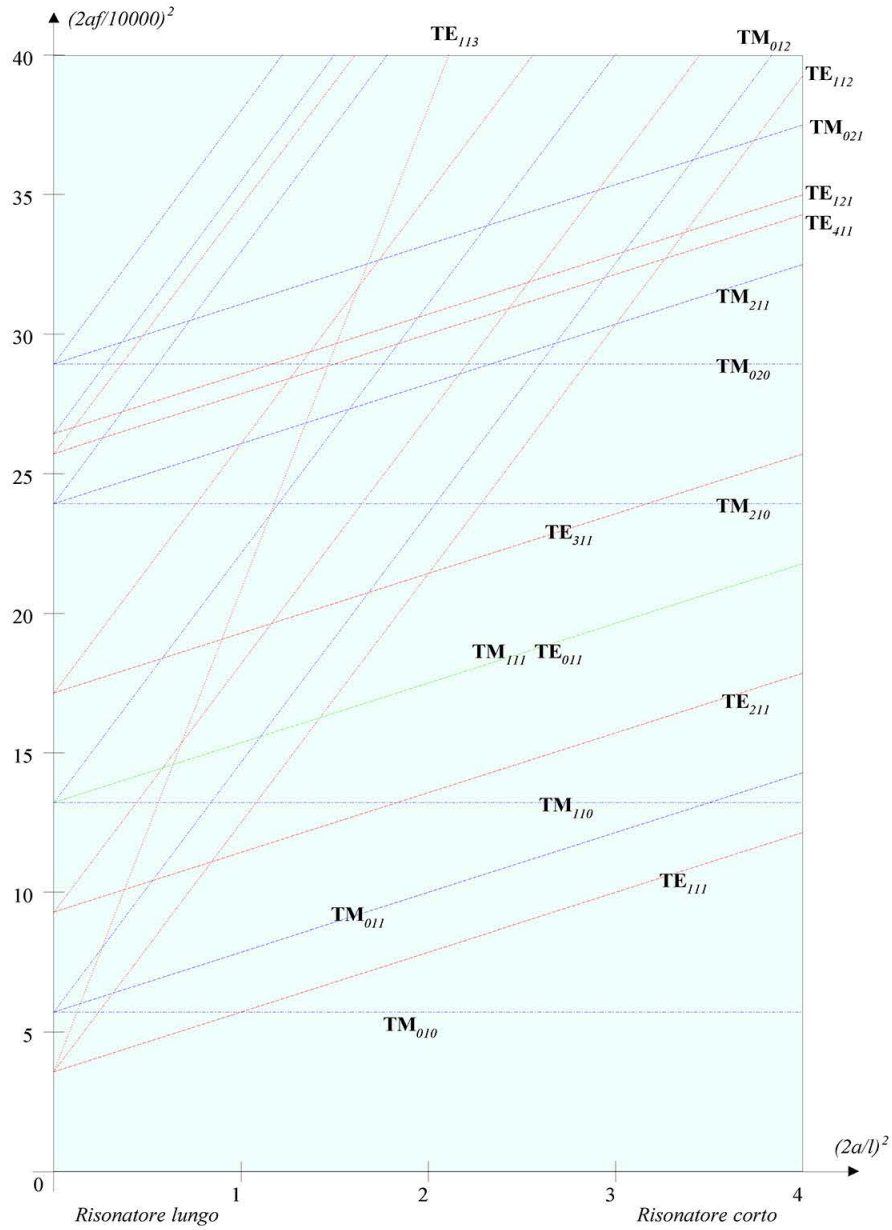


Figura 12.4 - Carta dei modi per una cavità risonante a sezione circolare.

È essenziale tenere presente che, nell'utilizzo dei risonatori conviene sempre lavorare con un solo modo, in quanto la presenza di modi spuri danneggia i risultati delle misure. Sulla carta dei modi normalizzata esistono diverse zone di lavoro, per cui scelta la ω_0 a cui si vuol lavorare e fissata una delle due dimensioni (raggio o lunghezza) è possibile ricavare l'altra. Dalla carta per esempio si vede che la retta corrispondente al modo [111] ha dei vantaggi rispetto ad altre in quanto nel suo intorno non vi sono altri modi che la intersecano. Questo permette di variare liberamente il rapporto a/l senza andare ad interferire con altri modi. Esistono anche delle regioni più ampie (dal lato della frequenza) di quella descritta in cui è preferibile andare a lavorare, quindi ci si trova in presenza di modi interferenti con diverse configurazioni di campo. Nel caso dei risonatori cilindrici che lavorano con il modo [111] in genere non si riesce a coprire più di un'ottava e bisogna ricorrere a risonatori. Generalmente queste cavità presentano delle perdite che possono essere tenuti in conto mediante il parametro Q (i valori di Q sono più elevati rispetto ai circuiti a costanti concentrate). Il valore di Q dipende oltre che dalle perdite sulle pareti metalliche anche da come viene accordata la cavità con il modo risonante. Tale accordo viene modificato in alcune cavità variando con una vite micrometrica la profondità della cavità stessa come in figura 12.5 anche se è difficile assicurare la continuità perfetta tra pistone e cilindro (il che fa aumentare le perdite). Quindi in definitiva il problema è quello di ottenere delle bande più larghe possibile intorno alla ω_0 contemporaneamente all'esigenza di avere elevati valori di Q. Un modo particolarmente adatto allo scopo è il [011] che comunque è degenere con il (111). Vediamo che configurazione di campo ha il (011). In generale:

$$h_z = C\mathcal{J}_n(\chi_r)\sin(n\vartheta + \varphi)$$

Dato che $n = 0, m = 1, s = 1$ da h_z sparisce la dipendenza dall'angolo ϑ, pertanto:

$$h_z = C\mathcal{J}_n(\chi_r)$$

Per i campi trasversi si ha:

$$\underline{h}_t = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla_t h_z = f(r)\underline{r}_0$$

$$\underline{e}_t = \eta_z\left(\underline{h}_t \times \underline{z}_0\right) = g(r)\underline{\vartheta}_0$$

Si può notare che le linee di forza del campo elettrico sono puramente circonferenziali ad ampiezza costante con ϑ, con una densità che varia secondo la ***F.d.B.*** di ordine zero, cioè è massima al centro con andamento decrescente verso i bordi. Il campo magnetico, invece, è puramente radiale, pertanto si deduce che le correnti sulla superficie del conduttore sono circonferenziali (si ricordi che $\underline{J} \propto \underline{n} \times \underline{H}$).

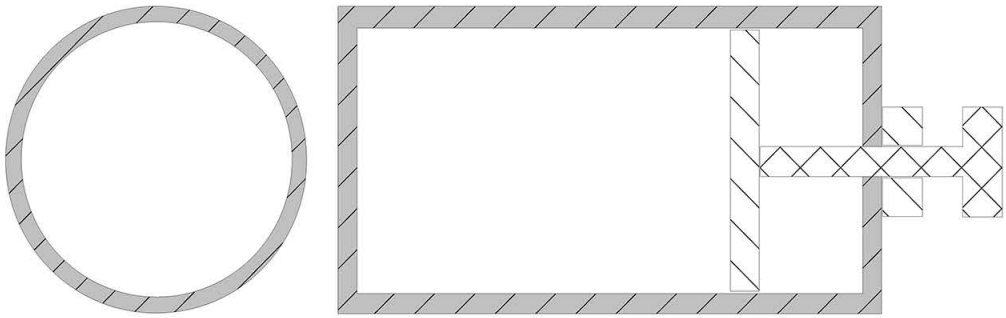


Figura 12.5 - Esempio di struttura accordabile.

Tale tipo di correnti sono vantaggiose nel caso di strutture accordabili del tipo in figura 12.5 in quanto esse non tendono ad attraversare la zona di contatto tra cilindro e pistone, ottenendo così un più alto Q. In generale comunque la presenza di spurie fa si che debba essere ridotta notevolmente la banda su cui sintonizzare queste cavità (nel caso del [011]). Nei casi in cui è molto importante garantire adeguate larghezza di banda si adottano risonatori in cavo coassiale che comunque presentano dei bassi valori di Q. Si ricordi che in strutture di questo tipo si possono propagare anche dei modi ***TEM*** che hanno frequenze di taglio zero. Il risonatore in figura 12.7 si presenta come una struttura mista in quanto è una guida circolare con una parete magnetica, in cui un conduttore centrale mobile rende possibile una sintonizzazione. La carta dei modi mi fornisce tutte le indicazioni concernenti il calcolo di ω_0. L'altro parametro è rappresentato dall'energia immagazzinata che differisce da modo a modo (ricordiamo che in strutture senza perdite l'energia è costante).

$$W(t) = W_{e\,max} = W_{m\,max} = costante$$

Vediamo più in dettaglio il risonatore a sezione rettangolare di figura 12.2. Possiamo calcolare il valore di $W(t)$ per il modo $\mathrm{TE}_{[\mathbf{101}]}$. Per tali risonatori vale la (12.5) che nel nostro caso essendo $m = 1, n = 0, s = 1$ diviene:

$$\omega_{0[101]} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$$

Nel caso che la struttura possa essere considerata priva di perdite, alla frequenza di risonanza ω_0, si ha:

$$W(t) = \frac{1}{2}\varepsilon \int_\tau \underline{E}\cdot\underline{E}^* d\tau = \frac{1}{2}\mu \int_\tau \underline{H}\cdot\underline{H}^* d\tau \tag{12.12}$$

Ricaviamo $W(t)$ sostituendo nella (12.12) le espressioni generali dei campi elettrici che per una guida rettangolare sono:

$$\begin{aligned} e_x &= -C_2 D_2 \frac{j\omega\mu}{K_t^2}\frac{n\pi}{b} cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ e_y &= \; C_2 D_2 \frac{j\omega\mu}{K_t^2}\frac{m\pi}{a} sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{12.13}$$

per il [101] si ha:

$$\begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= \; C_2 D_2 \frac{j\omega\mu}{K_t^2}\frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

Dato che:

$$\underline{E}(x,y,z) = \underline{e_t}(x,y)\, Z_e(z) = e_y(x,y)\, Z_e(z)\underline{y_0} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)\underline{y_0}$$

Quindi:

$$W(t) = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \int_0^b dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{8}\varepsilon E_0^2 b \int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] dx \int_0^l \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{l}\right)\right] dz = \frac{1}{8}\varepsilon E_0^2 abl$$

Quindi $W(t)$ risulta proporzionale al volume $\tau = abl$ del risonatore. Trovati quindi ω_0 e $W(t)$ possiamo trovare la linea equivalente relativa al modo [101]. Per una struttura priva di perdite si ha:

$$\begin{aligned} \underline{E_t}(x,y,z) &= \underline{e_t}(x,y)\left[P_1\, e^{j\beta_z z} + P_2\, e^{-j\beta_z z}\right] \\ \underline{H_t}(x,y,z) &= \underline{h_t}(x,y)\left[-P_1\, e^{j\beta_z z} + P_2\, e^{-j\beta_z z}\right] \end{aligned} \tag{12.14}$$

Le condizioni di chiusura impongono che per $z = 0 \longrightarrow P_1 = -P_2$ mentre per $z = l \longrightarrow \beta_z = s\pi/l = \pi/l$. Sostituendo nella (12.14) si ottiene:

$$\underline{E_t}(x,y,z) = \underline{e_t}(x,y)\, P_1\left[\, e^{j\beta_z z} - e^{-j\beta_z z}\right] = \underline{e_t}(x,y)\, 2jP_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$
$$\underline{H_t}(x,y,z) = -\underline{h_t}(x,y)\, P_1\left[\, e^{j\beta_z z} + e^{-j\beta_z z}\right] = -\underline{h_t}(x,y)\, 2P_1 \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

Da queste relazioni si può notare che $\underline{E_t}$ ed $\underline{H_t}$ sono tra loro in quadratura pertanto il flusso di energia in una generica sezione della cavità è nullo, infatti esiste soltanto una energia immagazzinata. Si ricordi che nel definire le tensioni e le correnti (capitolo I) era stata introdotta una costante arbitraria moltiplicativa che poi abbiamo individuato essere l'impedenza caratteristica della linea equivalente, per cui:

$$\underline{E_t}(x,y,z) = \frac{\underline{e_t}(x,y)}{\sqrt{\eta}} \left[j2\sqrt{\eta}P_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right]$$
$$\underline{H_t}(x,y,z) = -\sqrt{\eta}\, \underline{h_t}(x,y) \left[\frac{2P_1}{\sqrt{\eta}} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right]$$

Dove le espressioni tra parentesi quadre sono proprio le tensioni e le correnti:

$$\begin{aligned} V(z) &= \left[j2\sqrt{\eta}P_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right] = \sqrt{\eta}\, Z_e \\ I(z) &= \left[\frac{2P_1}{\sqrt{\eta}} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right] = \frac{Z_h}{\sqrt{\eta}} \end{aligned} \qquad (12.15)$$

che soddisfano entrambe le equazioni delle linee di trasmissione ed il loro rapporto è legato alla impedenza della linea equivalente relativa al modo [101]. Quindi si ha:

$$\underline{E_t}(x,y,z) = \frac{\underline{e_t}(x,y)}{\sqrt{\eta}}\, V(z)$$
$$\underline{H_t}(x,y,z) = -\sqrt{\eta}\, \underline{h_t}(x,y)\; I(z)$$

Ricordiamo infine che affinché il circuito ideale sia completamente equivalente alla struttura fisica è necessario che vi sia l'uguaglianza delle potenze immagazzinate. A tal proposito si era arrivati, nel capitolo I (1.20), alla seguente normalizzazione:

$$\int_S \left(\underline{e_t} \times \underline{h_t^*}\right) \cdot \underline{z}_0 \; ds = \frac{1}{\eta_z} \int_S \left(\underline{e_t} \cdot \underline{e_t^*}\right) \; ds = 1 \qquad (12.16)$$

Dato che $\underline{E}(x,y,z) = E_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/l)\; \underline{y}_0 = \underline{E_t}$, in quanto il vettore $\underline{E}$ è parallelo ad $\underline{y}_0$, si ha:

$$\underline{E_t}(x,y,z) = \frac{\underline{e_t}(x,y)}{\sqrt{\eta}}\, V(z) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \underline{y}_0$$

Inserendovi la prima delle (12.15) otteniamo l'uguaglianza:

$$\underline{e}_t(x,y)\, j2\sqrt{\eta}P_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)\underline{y}_0$$

semplificando:

$$\underline{e}_t(x) = \frac{E_0}{j2P_1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\underline{y}_0$$

che sostituita nell'integrale a secondo membro della (12.16) dà la condizione:

$$\frac{1}{\eta_z}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{E_0}{j2P_1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx\, dy = 1$$

risolvendo:

$$\frac{E_0^2}{8\,\eta_z\,P_1^2}\,ab = 1 \quad \Longrightarrow \quad P_1 = \frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}}$$

Sostituendo nelle (12.15) si ottiene:

$$\begin{aligned} V(z) &= \left[j\sqrt{\eta}\,E_0\sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}}\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right] \\ I(z) &= \left[\frac{E_0}{\sqrt{\eta}}\sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}}\cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right] \end{aligned} \qquad (12.17)$$

Dove η_z è l'impedenza d'onda del modo considerato [101] che nel nostro caso è:

$$\eta_{z\,TE} = \frac{j\omega\mu}{K_z} = \frac{\omega\mu}{\beta_z} = \frac{\omega\mu l}{\pi}$$

Consideriamo ora un circuito LC del tipo:

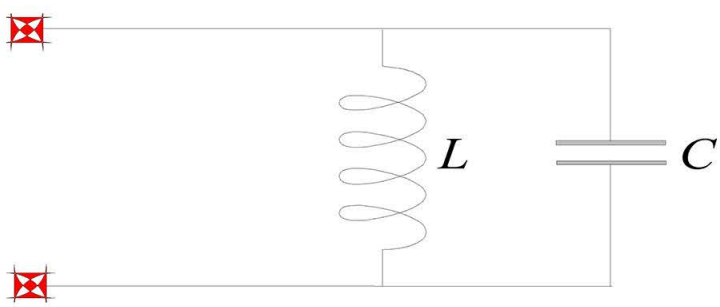


Figura 12.6 - Risonatore LC.

l'energia che è in grado di immagazzinare alla frequenza di risonanza è:

$$W(t) = \frac{1}{2} C |V_{max}|^2 = \frac{1}{2} L |I_{max}|^2 \tag{12.18}$$

dove V_{max} e I_{max} sono rispettivamente la massima tensione ai capi del condensatore e la massima corrente che attraversa l'induttore. Dalle (12.17) si ricava che:

$$\begin{aligned} |V_{max}|^2 &= \left| j\sqrt{\eta}\, E_0 \sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}} \right|^2 \\ |I_{max}|^2 &= \left| \frac{E_0}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}} \right|^2 \end{aligned} \tag{12.19}$$

Dunque:

$$W_{[101]} = \frac{1}{2} C \left| j\sqrt{\eta}\, E_0 \sqrt{\frac{ab}{2\,\eta_z}} \right|^2 = \frac{1}{2} C\, \eta\, E_0^2 \frac{ab}{2\,\eta_z} = \frac{C\,\eta\, ab\, E_0^2}{4\,\eta_z}$$

Ricordando che con i campi *e.m.* si era trovato che:

$$W_{[101]} = \frac{\varepsilon\, abl\, E_0^2}{8}$$

si può calcolare la capacità come:

$$C\,\eta\, ab\, E_0^2 = \frac{\varepsilon\, abl\, E_0^2}{8}\, 4\eta_z$$

$$\eta_z = \frac{\omega \mu l}{\pi}$$

$$C\eta = \frac{\varepsilon\, \mu\, \omega_0 l^2}{2\pi}$$

inoltre:

$$\omega_{0[101]} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$C\eta = \frac{l^2 \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}}{2\pi}$$

Poiché η è arbitrario possiamo scegliere $\eta = 1$ pertanto la capacità equivalente è:

$$C = \frac{l^2\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{a}\right)^2}}{2\eta_0}$$

Invece di ripetere il calcolo con l'ultimo membro della (12.18), possiamo trovare l'induttanza L dalla relazione $\omega_0^2 = 1/(LC)$:

$$L = \frac{2l^2}{\pi^2\eta_0}\left[1 + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]^{-3/2}$$

Il circuito equivalente di una cavità risonante va inteso come un circuito isolato in cui in qualche modo siamo riusciti ad immettere dell'energia che permette al campo *e.m.* di risuonare alla frequenza ω_o per un tempo indefinito (struttura senza perdite).

È evidente quindi che il corrispondente circuito equivalente non abbia bocche di ingresso né di uscita, quindi non si tratta né di un circuito serie né di uno parallelo.

Dato che sono stati definiti sia $V(z)$ che $I(z)$ e poiché abbiamo imposto le chiusure $z = 0$ e $z = l$ abbiamo che in tali punti le tensioni sono nulle.

13 CAVITÀ RISONANTI REALI

Abbiamo studiato fino ad ora il risonatore a cavità privo di perdite, dove sono state trascurate due tipi di perdite:

1) i dielettrici interni alla cavità hanno una g≠0 in quanto non sono ideali.
2) le pareti della cavità hanno una $g \neq \infty$ in quanto non sono conduttori ideali.

Questi due fattori fanno sì che il risonatore non sia ideale e che sia caratterizzato da un Q che tiene conto di queste perdite.

Nella maggioranza dei casi pratici all'interno dei risonatori c'è aria per cui le perdite sono in generale trascurabili, cosa che invece non può essere fatta per le perdite per effetto *Joule* sulle pareti metalliche. Ricordiamo che il coefficiente di risonanza è stato definito come:

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_e} \tag{13.1}$$

dove ω_o è la frequenza di risonanza per il risonatore ideale, W è l'energia media immagazzinata in un periodo (costante in un risonatore ideale, decrescente in un risonatore reale), P_e è la potenza media dissipata nello stesso periodo in cui viene calcolata la $W(t)$. L'energia media W può essere calcolata dalla relazione:

$$W = \frac{1}{4}\int_\tau \left[\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^*\right] d\tau \tag{13.2}$$

avendo eseguito la quantizzazione in un intervallo di tempo T_0 il risonatore si comporta come se in tale intervallo fosse ideale e quindi l'energia è costante, cioè:

$$\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^* \tag{13.3}$$

per cui:

$$W = \frac{1}{2}\int_\tau \left[\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^*\right] d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau \left[\varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^*\right] d\tau \tag{13.4}$$

Dato che in realtà il conduttore non è perfetto, la componente tangenziale del campo elettrico sulla superficie non è nulla e si può dire che il campo *e.m.* penetra dentro il conduttore dove viene dissipato per effetto *Joule* dalle correnti. Quindi in realtà esiste un flusso del vettore di *Poynting* uscente dalla cavità che può essere espresso come:

$$W = \frac{1}{2} Re\left\{\int_S [\underline{E}_\tau \times \underline{H}_\tau^*] \cdot \underline{n}_0 \, dS\right\} \tag{13.5}$$

Pur non essendo ideale la superficie metallica è sempre un buon conduttore, per cui posso considerare che tra campo elettrico e magnetico vi sia una dipendenza del tipo onda piana, cioè:

$$\underline{E}_\tau = \eta_c \, \underline{H}_\tau \times \underline{n}_0 \tag{13.6}$$

per cui sostituendo nella (13.5) si ha:

$$P_e = \frac{1}{2} Re\left\{\eta_c \int_S (\underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*) \, dS\right\} \tag{13.7}$$

Quindi la (13.1) può essere espressa come funzione del solo campo magnetico.

$$Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{2}\mu \int_\tau (\underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*) \, d\tau}{\frac{1}{2} Re\{\eta_c \int_S (\underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*) \, dS\}} \tag{13.8}$$

Poiché gli integrali sono sicuramente reali, è poiché per un conduttore si ha che:

$$\eta_c = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2g}} \tag{13.9}$$

Notiamo che sulle superfici metalliche il campo magnetico può essere scomposto nella $\underline{H} = \underline{H}_\tau + H_n \, \underline{n}_0$, ma dato che sulle ***PEI*** $H_n = 0$

risulta che $H = \underline{H}_\tau$ su S pertanto la (13.8) si semplifica nella:

$$Q = \omega_0 \frac{\mu \int_\tau (\underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*) \, d\tau}{\sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2g}} \int_S (\underline{H}_\tau \cdot \underline{H}_\tau^*) \, dS} \tag{13.10}$$

Si vede subito che il coefficiente di risonanza Q è tanto più grande quanto maggiore è il volume τ della cavità, mentre diminuisce all'aumentare della superficie S. In altri termini l'energia immagazzinata è tanto più grande quanto maggiore è il volume τ, mentre le perdite aumentano all'aumentare della superficie metallica S.

I risonatori sferici sono quelli che a parità di volume hanno la minima superficie. Un'altra considerazione si può fare per strutture aventi la stessa forma, ma dimensioni diverse. Infatti, si può notare che lo spettro dei modi trasla verso frequenze più basse all'aumentare delle dimensioni, inoltre nei casi si presenti la

necessità di scegliere tra un risonatore "*grande*" ed uno "*piccolo*" (stessa forma geometrica) che hanno la stessa frequenza di risonanza (ma diversi modi) conviene scegliere quello più grande in quanto ha uno Q maggiore.

D'altro canto, comunque se scelgo il risonatore "*grande*" ho l'inconveniente che alla frequenza scelta i modi sono più vicini rispetto al risonatore "*piccolo*" per cui possono nascere degli accoppiamenti spuri. Quindi nella pratica si cerca di trovare una via di mezzo che permetta di avere elevati Q contemporaneamente all'esigenza di scegliere un modo che sia abbastanza distante dai contigui (sulla scala delle frequenze). Applichiamo la (13.10) ad un risonatore a parallelepipedo con base rettangolare e lunghezza l. Ogni modo tra gli infiniti possibili avrà un suo valore di Q, per cui scegliamo quello che è più interessante per questo tipo di struttura, il $TE_{[101]}$, che è il modo fondamentale nel caso che la dimensione b sia più piccola di a ed l. La frequenza di risonanza per tale modo è:

$$\omega_{0[101]} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{13.11}$$

Per trovare Q dobbiamo conoscere la configurazione del campo magnetico all'interno della struttura. Ricordiamo che il modo $TE_{[101]}$ per il risonatore rettangolare ha le componenti del campo magnetico lungo l'asse x e l'asse z. In generale per trovare $\underline{H}$ si dovrebbe partire dalle equazioni che descrivono i capi, ma in questo caso, mediante alcune considerazioni sulla struttura e sulle condizioni al contorno, possiamo affermare che H_z avrà un andamento di tipo seno o coseno sia lungo l'asse x che lungo l'asse z. Dovendo essere H_z tangenziale e diverso da zero sulle pareti $x = 0$ ed $x = a$ si può dedurre che la dipendenza sarà di tipo coseno, mentre lungo z la dipendenza sarà del tipo seno in quanto dovrà essere H_z=0 sia per z=0 che per z=l. Quindi possiamo scrivere che $H_z = h_z\, Z_e(z)$, inoltre nel capitolo precedente si era ricavato che $Z_e = 2jP_1 \sin(\beta_z z)$, per cui conglobando tutte le costanti si ha:

$$H_z = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

Per la componente $\underline{H_x}$ vale invece:

$$\underline{H_x} = \underline{h_t} Z_h(z)$$

Con

$$\underline{h}_t = \frac{K_z}{K_t^2}\nabla \underline{h}_z = -\frac{A\pi K_z}{aK_t^2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\underline{x}_0$$

ma $K_x = j\beta z = j\pi/l$ e $K_t^2 = -(\pi/a)^2$, per cui sostituendo si ha:

$$\underline{H}_x = j\frac{Aa}{l}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)Z_h(z)\,\underline{x}_0$$

dove

$$Z_h(z) = -P_1 e^{j\beta_z z} + P_2 e^{-j\beta_z z}$$

per cui imponendo le condizioni al contorno si ottiene:

$$Z_h(z) = 2P_1\cos(\beta_z z)$$

Ponendo $2P_1 = -j \rightarrow Z_h(z) = -j\cos(\beta_z z)$

$$\underline{H}_x = -\frac{Aa}{l}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_z z)\,\underline{x}_0$$

In questa espressione ci sono le varie costanti che soddisfano le equazioni di *Maxwell*. Si tenga conto che anche in questo caso si potevano ricavare le leggi di dipendenza con le condizioni al contorno, ma in ogni caso, è necessario ricavare le costanti che legano le ampiezze H_z e $\underline{H}_x$, in quanto il loro rapporto deve soddisfare le equazioni di *Maxwell*. Assumendo $A = 1$ si ha:

$$\underline{H}_x = -\frac{Aa}{l}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_z z)\,\underline{x}_0$$
$$H_z = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

Essendo dalla (13.10)

$$Q = \omega_0\frac{\mu\int_\tau |\underline{H}|^2\,d\tau}{\sqrt{\frac{\omega_0\mu}{2g}}\int_S |\underline{H}|^2\,dS} \tag{13.12}$$

Possiamo trovare i due integrali:

$$\int_\tau |\underline{H}|^2\,d\tau = \int_\tau |\underline{H}_z|^2 + |\underline{H}_x|^2\,d\tau = \int_\tau \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) + \left(\frac{a}{l}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\beta_z z)\,d\tau =$$

$$= b\left[\frac{al}{4} + \left(\frac{a}{l}\right)^2\frac{al}{4}\right] = \frac{abl}{4}\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$$

Per quanto riguarda l'integrale a denominatore di Q occorre precisare che è dato dalla somma dei contributi delle sei superfici di cui è formato il parallelepipedo, oppure dalla somma dei contributi delle tre pareti ortogonali moltiplicate per 2.

Pertanto:

$$\int_S \left|\underline{H}\right|^2 \, dS = \int_S \left|\underline{H}_z\right|^2 + \left|\underline{H}_x\right|^2 \, dS =$$

$$= 2\left\{ \int_0^a \int_0^b \left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi a}{x}\right) dx\, dy + \int_0^b \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) dy\, dz \right.$$

$$\left. + \int_0^a \int_0^l \left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi a}{x}\right)\cos^2\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right] dx\, dz \right\} =$$

$$\frac{al}{2}\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] + bl\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]$$

In definitiva per il parametro Q si ha:

$$Q_{TE[101]} = \sqrt{2\omega_0 \mu g}\, \frac{\frac{b}{2}\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] + bl\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]} \qquad (13.12b)$$

Nel caso particolare di risonatore cubico ($a = b = l$) si ottiene che:

$$Q_{TE[101]\,cub} = \frac{a}{6}\sqrt{2\omega_0 \mu g}$$

Esiste cioè una proporzionalità diretta di $\boldsymbol{Q}$ con la dimensione a. Per esempio, per un risonatore cubico in rame con $a = 2\ cm$ per il $\mathrm{TE}_{[101]}$ si ha:

$$\omega_0 = 66.64\left[G\, {}^{rad}/_{sec}\right] \quad \Longrightarrow \quad f_0 = 10.6\ [GHz]$$

$$g = 5.8\ 10^7\ [{}^{S}/_{m}] \quad \Longrightarrow \quad Q = 10389.4$$

Abbiamo fino ad ora visto i parametri caratteristici delle cavità risonanti. Vediamo ora come queste cavità vengono collegate agli elementi del sistema a microonde. Gli accoppiamenti con la struttura guidante possono essere classificati nei seguenti tre tipi:

1) Accoppiamento elettrico (sonda di campo elettrico). Si tratta di una piccola antenna lineare (per esempio il conduttore centrale di un cavo coassiale come in figura 13.1) che va ad eccitare il campo elettrico all'interno della struttura in funzione del modo che eccitare o prelevare.

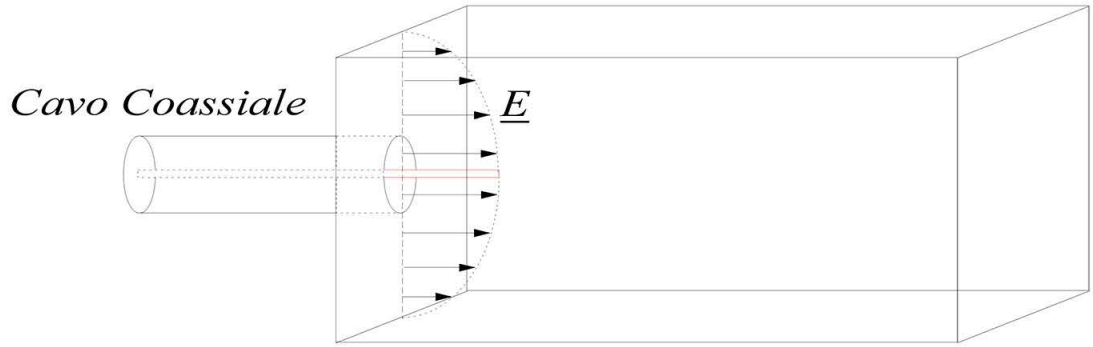


Figura 13.1 - Esempio di accoppiamento elettrico in cavità

2) Accoppiamento magnetico (sonda di campo magnetico). Si tratta di un'antenna chiusa a formare una spira (Loop) che eccita il campo magnetico del modo a cui siamo interessati. Può essere ottenuto chiudendo a massa il conduttore centrale di un cavo coassiale come mostrato in figura 13.2.

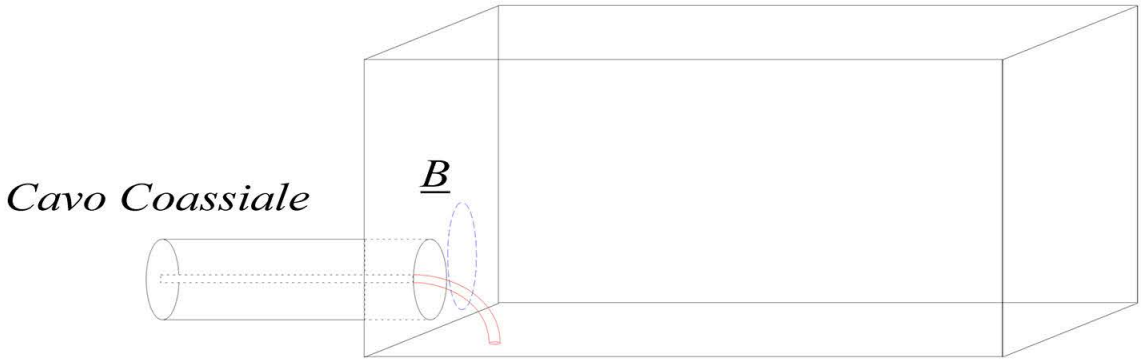


Figura 13.2 - Esempio di accoppiamento magnetico in cavità

3) Accoppiamento tramite fori. Il foro collega la cavità risonante alla struttura guidante e consente un accoppiamento con il campo *e.m.* che eccita la cavità stessa (figura 13.3).

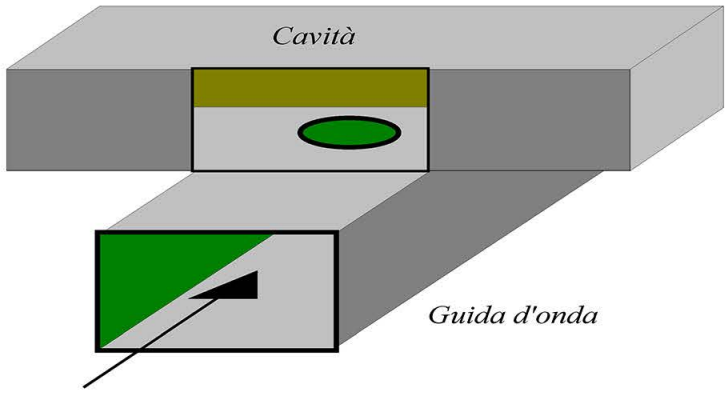


Figura 13.3 - Esempio di accoppiamento tramite fori

L'efficienza di accoppiamento dipende da come viene realizzato l'accoppiamento nei confronti del tipo di modo che vogliamo considerare. Se per esempio vogliamo eccitare il $TE_{[111]}$ di un risonatore cilindrico con la massima efficienza di accoppiamento dovremo inserire un'antenna nella posizione in cui il campo elettrico presenta un massimo (vedi figura 13.4).

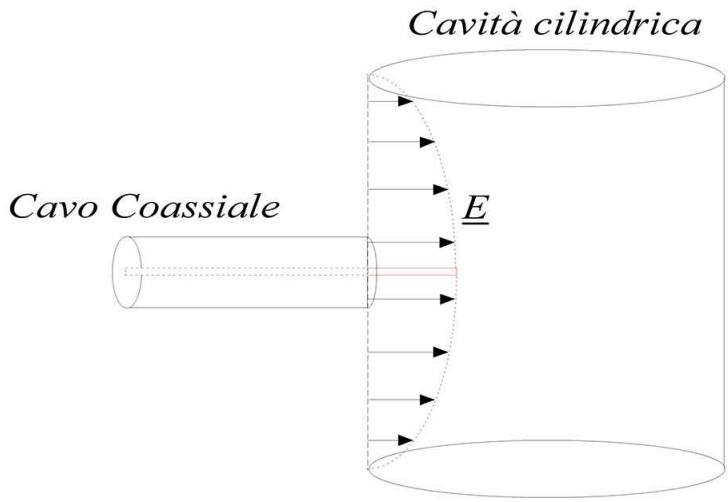


Figura 13.4 - Esempio di accoppiamento elettrico in cavità cilindrica

Se il modo fosse stato un ***TM*** l'accoppiamento sarebbe stato diverso, infatti dato che la componente tangenziale deve essere massima sulle pareti la legge di dipendenza è di tipo coseno per cui l'accoppiamento più efficiente è quello di figura 13.5 che ha il loop nella posizione in cui il campo magnetico ha un massimo.

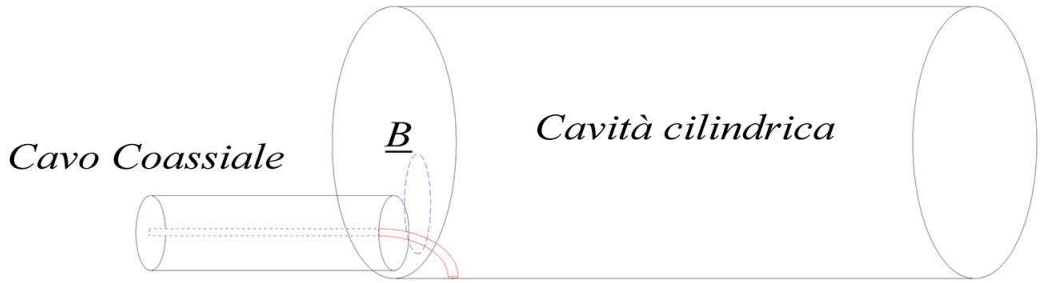


Figura 13.7 - Esempio di accoppiamento magnetico in cavità cilindrica

Non sempre è desiderabile avere un accoppiamento massimo tra cavità è guida, infatti, se la cavità è utilizzata in un *Klystron* o in un *Magnetron* (generatori di microonde) si vuole realizzare il massimo accoppiamento, mentre se la cavità è utilizzata come uno strumento di misura, per esempio un frequenzimetro, allora è preferibile realizzare il minimo accoppiamento in modo tale da non alterare la grandezza sottomisura.

L'inserzione delle cavità in un circuito può essere realizzata in quattro modi differenti:

1) Cavità a terminazione o a reazione (figura 13.6). in questo caso la cavità è utilizzata come un carico pertanto può essere studiata come una struttura ad una bocca che produce degli effetti di riflessione sulla linea.

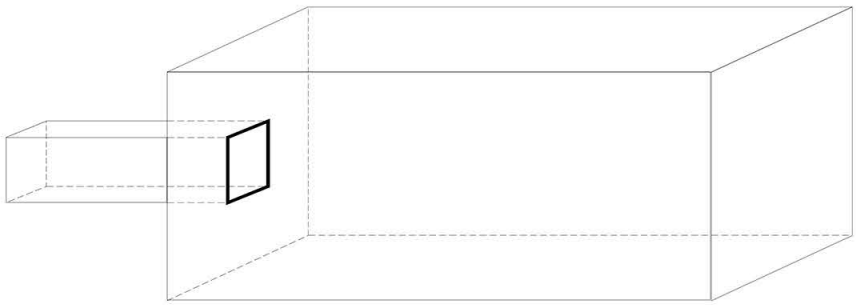


Figura 13.6 - Esempio di accoppiamento a terminazione (single ended)

2) Cavità in derivazione (figura 13.7). È tipica negli apparati di misura delle frequenze per cui l'accoppiamento dovrà essere il minimo possibile. In genere viene studiato come un componente a due bocche.

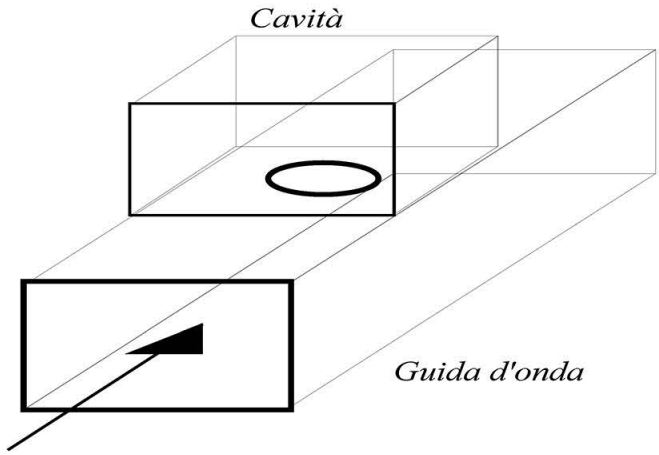


Figura 13.7 - Esempio di cavità in derivazione.

3) Cavità a trasmissione (figura 13.8). La cavità è interposta in una linea di trasmissione (struttura due bocche) è presenta proprietà filtranti in quanto se la linea di trasmissione trasporta energia alla frequenza ω_o (frequenza di risonanza della cavità) questa verrà trasmessa alla bocca 2 mentre le altre frequenze non riescono ad eccitare nessun modo e quindi non si propagano alla bocca di uscita. Pertanto, una tale struttura si comporta come un filtro passa banda.

Figura 13.8 - Esempio di cavità a trasmissione.

4) cavità collegate in modo misto (derivazione e trasmissione). In tal caso la struttura ha tre bocche ed è tipica dei sistemi di rilevazione.

Nei modelli ora visti il concetto di Q va rivisto, in quanto fino ad ora ci siamo ricavati il coefficiente per strutture isolate, mentre nella realtà il Q è legato al tipo di accoppiamento realizzato e al modo di inserzione nel circuito. Consideriamo per esempio la cavità a terminazione ed indichiamo con:

$Q_0 = Q$ della cavità isolata. In questo caso su Q_0 influiscono le perdite nel metallo e nel dielettrico.

$Q_L = Q$ della cavità alimentata (sotto carico).

Se studiamo la cavità come una struttura ad una bocca abbiamo:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} (con\ \eta = 1) = \frac{a+b}{a-b}$$

tenendo presente che la cavità è reale ($Q < \infty$), nell'intorno della frequenza di risonanza (condizione in cui la cavità viene fatta lavorare), si ha:

$$Z_{in} = R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \quad circuito\ serie$$

$$Z_{in} = \frac{1}{G\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} \quad circuito\ parallelo$$

In fase di progetto le cavità vengono accoppiate in condizioni tali che, alla frequenza di risonanza, la cavità, sia adattata sulla linea. Poiché la linea è priva di perdite, con impedenza caratteristica uguale ad 1, per adattare il risonatore serie dovremo fare in modo che $Z_{in} = R = 1$ per $\omega = \omega_0$. I parametri del circuito equivalente RLC dipendono dall'accoppiamento (profondità dell'antenna o larghezza della spira ecc.), per cui bisogna giocare sui parametri che variano l'accoppiamento stesso, per trovare la condizione di adattamento. L'accoppiamento che realizza la condizione di adattamento alla frequenza di risonanza è detto accoppiamento critico. In alcuni casi ci si può trovare in condizioni di sovraccoppiamento se $R > 1$ (sempre con riferimento al caso serie) o di sottoaccoppiamento se $R < 1$. per il caso parallelo la condizione di accoppiamento si realizza con $G = 1$. Nel caso serie in condizioni di accoppiamento critico abbiamo lo schema equivalente:

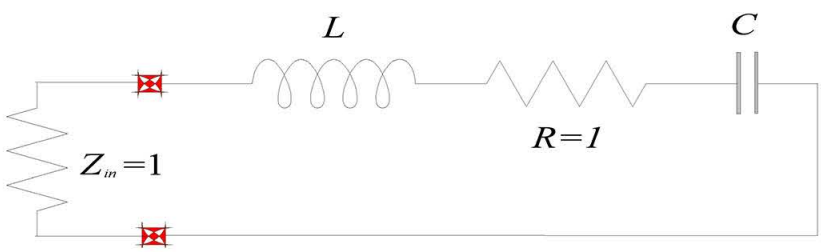


Figura 13.9 - Circuito equivalente della cavità accoppiata.

Con $Q_0 = \omega_0 L/R = \omega_0 L$. Se consideriamo la cavità sotto carico si ha invece $Q_L = \omega_0 L/(2R) = \omega_0\, L/2$ quindi $Q_L = Q_0/2$. È evidente quindi che collegando una cavità ad una linea di alimentazione il valore di Q diminuisce (un discorso analogo vale per il caso parallelo).

14 Metodi Di Sintesi Per Strutture Ad Una Bocca

In questo capitolo determineremo un circuito equivalente di una struttura ad una bocca che abbia delle caratteristiche individuabili tramite i parametri di ingresso della struttura a costanti distribuite. Consideriamo una struttura del tipo mostrato in figura 11.1, e supponiamo, per ora, che possa essere approssimata ad un componente senza perdite. Ricordiamo che nel capitolo 3 avevamo trovato l'impedenza e la reattanza di ingresso che riportiamo per comodità:

$$Z_{in}(\omega) = j\, X_{in}(\omega) \;\; \text{con}\; X_{in}(\omega) = \frac{4\omega(W_m - W_e)}{I\, I^*}$$

$$Y_{in}(\omega) = j\, G_{in}(\omega) \;\; \text{con}\; G_{in}(\omega) = \frac{4\omega(W_e - W_m)}{V\, V^*}$$

Dall'osservazione del modo in cui variano $X_{in}(\omega)$ e $G_{in}(\omega)$ con la frequenza si possono dedurre delle proprietà molto importanti, per cui cercheremo ora di ricavare una loro forma partendo da considerazioni di tipo elettromagnetico. Le equazioni di *Maxwell* affermano che:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\, \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon\, \underline{E} \end{aligned} \tag{14.1}$$

Facciamo ora le seguenti operazioni:

a) Coniugazione delle (14.1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E}^* &= j\omega\mu\, \underline{H}^* \\ \nabla \times \underline{H}^* &= -j\omega\varepsilon\, \underline{E}^* \end{aligned} \tag{14.2}$$

c) Derivazione rispetto ad ω delle (14.2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\partial \underline{E}^*}{\partial\omega} &= j\mu\, \underline{H}^* + j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}^*}{\partial\omega} \\ \nabla \times \frac{\partial \underline{H}^*}{\partial\omega} &= -j\varepsilon\, \underline{E}^* - j\omega\varepsilon\, \frac{\partial \underline{E}^*}{\partial\omega} \end{aligned} \tag{14.3}$$

Ricordando che:

$$\nabla\left(\underline{A} \times \underline{B}\right) = \underline{B} \cdot \left(\nabla \times \underline{A}\right) - \underline{A} \cdot \left(\nabla \times \underline{B}\right)$$

sviluppiamo la seguente relazione:

$$\nabla\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)$$

$$=-\underline{E}\left(\nabla\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}\right)+\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}(\nabla\times\underline{E})+\underline{H}\left(\nabla\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)-\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}(\nabla\times\underline{H}) \tag{14.5}$$

Sostituendo le equazioni (14.1) e (14.2) nel secondo membro si ottiene:

$$\underline{E}\left(j\varepsilon\,\underline{E}^*+j\omega\varepsilon\,\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)-\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}(j\omega\mu\,\underline{H})+\underline{H}\left(j\mu\,\underline{H}^*+j\omega\mu\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}\right)-\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}(j\omega\varepsilon\,\underline{E})$$

In definitiva semplificando i termini uguali si ottiene:

$$\nabla\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)=j\left(\varepsilon\,\underline{E}\,\underline{E}^*+\mu\,\underline{H}\,\underline{H}^*\right) \tag{14.6}$$

Ricordiamo che le densità medie di energia per un campo *e.m.* sono:

$$w_e=\frac{1}{4}\varepsilon\,\underline{E}\,\underline{E}^*$$
$$w_m=\frac{1}{4}\mu\,\underline{H}\,\underline{H}^*$$

per cui: la (14.6) diviene:

$$\nabla\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)=j4(w_e+w_m) \tag{14.7}$$

Integriamo ora la (14.7) sul volume τ della struttura considerata:

$$\int_\tau\nabla\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)d\tau=j4\int_\tau(w_e+w_m)\,d\tau \tag{14.7b}$$

Per il teorema della divergenza (o *Gauss*) l'integrale a primo membro si trasforma in un integrale esteso alla superficie chiusa della struttura, mentre l'integrale a secondo membro, a parte la costante $j4$ non è altro che la somma delle energie medie immagazzinate nella struttura che avevamo chiamato con W_e, W_m.

$$\oint_S\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)\cdot\underline{n}_0\,dS=j4(W_e+W_m) \tag{14.8}$$

L'integrale a primo membro è nullo su tutta la superficie a causa delle ben note condizioni al contorno ($\underline{E}_\tau=\underline{H}_\tau=0$ su S), tranne che sulla superficie di bocca S_b.

$$\int_{S_b}\left(\underline{E}\times\frac{\partial\underline{H}^*}{\partial\omega}-\underline{H}\times\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial\omega}\right)\cdot(-\underline{z}_0)\,dS=j4(W_e+W_m) \tag{14.9}$$

Il segno meno tiene conto del fatto che $\underline{z}_0$ è stato assunto entrante nella bocca, mentre $\underline{n}_0$ è il versore uscente. Inoltre, si ha:

$$\underline{E} \times \frac{\partial \underline{H}^*}{\partial \omega} = \underline{E}_t \times \frac{\partial \underline{H}_t^*}{\partial \omega}$$
$$\underline{H} \times \frac{\partial \underline{E}^*}{\partial \omega} = \underline{H}_t \times \frac{\partial \underline{E}_t^*}{\partial \omega}$$

Dove

$$\underline{E}_t = \frac{\underline{e}_t(q_1, q_2)}{\sqrt{\eta_0}} V(z)$$
$$\underline{H}_t = \underline{h}_t(q_1, q_2) I(z) \sqrt{\eta_0}$$

sostituendo nella (14.9)

$$V(z)\frac{\partial I(z)^*}{\partial \omega}\int_{S_b}\left(\underline{e}_t \times \underline{h}_t^*\right)\cdot \underline{z}_0\, dS - I(z)\frac{\partial V(z)^*}{\partial \omega}\int_{S_b}\left(\underline{h}_t \times \underline{e}_t^*\right)\cdot \underline{z}_0\, dS$$
$$= -j4(W_e + W_m) \qquad (14.9)$$

Ricordando la normalizzazione definita nel capitolo I gli integrali spariscono in quanto entrambi valgono 1.

$$V(z)\frac{\partial I(z)^*}{\partial \omega} - I(z)\frac{\partial V(z)^*}{\partial \omega} = -j4(W_e + W_m) \qquad (14.10)$$

sostituendo la $V = Z_{in}(\omega)\, I = j\, X_{in}(\omega)\, I$ si ha:

$$j\, X_{in}(\omega) I(z)\frac{\partial I(z)^*}{\partial \omega} - j\, X_{in}(\omega) I(z)\frac{\partial I(z)^*}{\partial \omega} - j|I(z)|^2\frac{\partial X_{in}(\omega)}{\partial \omega} = -j4(W_e + W_m)$$

$$|I(z)|^2\frac{\partial X_{in}(\omega)}{\partial \omega} = 4(W_e + W_m)$$

dove la derivata rispetto ad ω di X_{in} è totale in quanto è funzione solo della frequenza. In definitiva si ottiene:

$$\frac{\partial X_{in}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{4(W_e + W_m)}{|I(z)|^2} \qquad (14.11)$$

in modo analogo si ricava:

$$\frac{\partial B_{in}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{4(W_e + W_m)}{|V(z)|^2} \qquad (14.12)$$

Le relazioni (14.11) e (14.12) sono le relazioni che volevamo. Si ricorda che $W_e + W_m$ è l'energia totale immagazzinata nella struttura (alla frequenza di risonanza $W_e =$

W_m). Un'ultima proprietà deriva dalla teoria dei circuiti e consiste nell'affermare che $X_{in}(\omega)$ è una funzione dispari:

$$X_{in}(-\omega) = -X_{in}(\omega)$$

infatti, basta osservare che se $V_i(\omega)$ è una quantità reale, affinché anche $I_i(\omega)$ sia reale, necessariamente la $X_{in}(\omega)$ sia una funzione dispari. Ciò si dimostra trasformando secondo Fourier le $V_i(\omega)$, $I_i(\omega)$. Il fatto che $B_{in}(\omega)$ e $X_{in}(\omega)$ siano funzioni monotone crescenti, presuppone che i loro poli e gli zeri siano tutti semplici (molteplicità = 1) e si alternino uno con l'altro. Si osservi che per $\omega = 0$ la $X_{in}(0)$ può avere un polo o uno zero e analogamente il limite per ω che tende ad infinito di $X_{in}(\omega)$ deve ancora avere un polo o uno zero. Una funzioni con le due seguenti proprietà:

$$B_{in}(0) = 0; \quad \lim_{\omega\to\infty} X_{in}(\omega) = \pm\infty$$

può essere espansa in una serie di funzioni parziali, ricordando inoltre che $X_{in}(\omega)$ è una funzione di variabile reale si può scrivere:

$$X_{in}(\omega) = a\omega + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\omega - \omega_n} \tag{14.13}$$

Dobbiamo trovare ora la condizione che permettano alla (14.13) di conservare le proprietà della funzione originaria $X_{in}(\omega)$. La (14.13) può essere riscritta come:

$$X_{in}(\omega) = a\omega + \frac{b_0}{\omega - \omega_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_n}{\omega - \omega_n} + \frac{b_{-n}}{\omega - \omega_{-n}}\right] \tag{14.14}$$

Notiamo subito che la seconda proprietà è contenuta nel primo termine che è l'unico che diverge per ω che tende all'infinito.

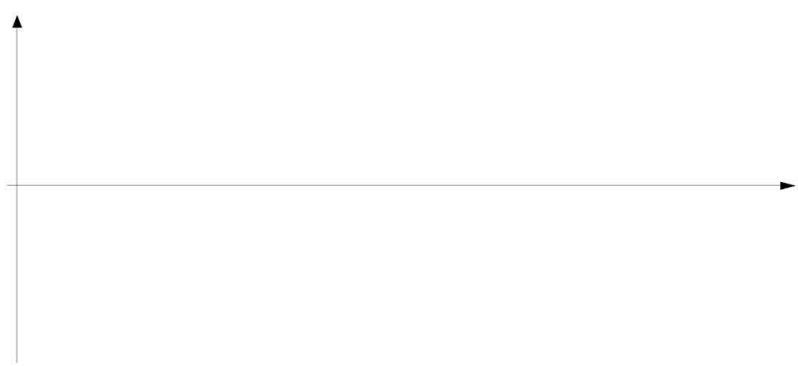


Figura 14.1 - Reattanza di ingresso $X_{in}(\omega)$.

Supponiamo che per $\omega = 0$ la $X_{in}(\omega)$ debba essere dispari per cui la (14.14) deve avere o un polo o uno zero (vedi figura 14.1), mentre, affinché si conservi la prima proprietà, deve essere $\omega_0 = 0$.

$$\mathfrak{J}(\omega) = \frac{b_n}{\omega - \omega_n} + \frac{b_{-n}}{\omega - \omega_{-n}}$$

Se vogliamo che questa funzione risulti dispari dobbiamo fare in modo che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

$$\omega_{-n} = -\omega_n; \qquad \mathfrak{J}(\omega) = -\mathfrak{J}(-\omega)$$

Dalla prima si ottiene:

$$\mathfrak{J}(\omega) = \frac{b_n}{\omega - \omega_n} + \frac{b_{-n}}{\omega + \omega_n}$$

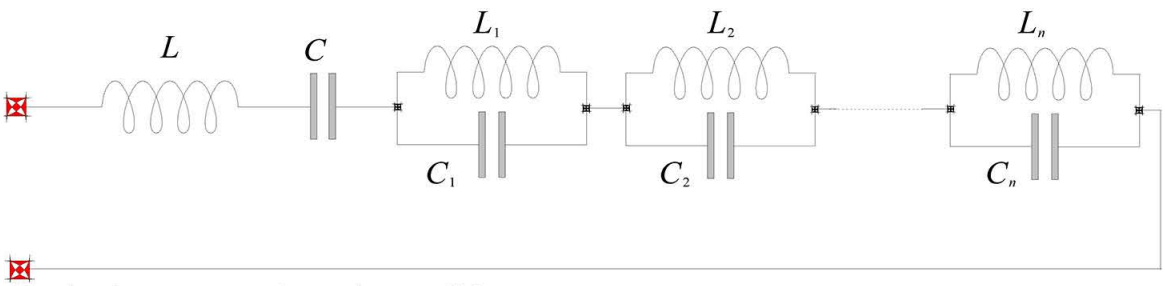
Mentre dalla seconda si ha:

$$\frac{b_n}{\omega - \omega_n} + \frac{b_{-n}}{\omega + \omega_n} = \frac{b_n}{\omega + \omega_n} + \frac{b_{-n}}{\omega - \omega_n}$$

che può essere soddisfatta soltanto se $b_n = b_{-n}$. Quindi si è ottenuto:

$$X_{in}(\omega) = a\omega + \frac{b_0}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{\omega - \omega_n} + \frac{1}{\omega + \omega_n}\right] = a\omega + \frac{b_0}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega b_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \tag{14.15}$$

La forma canonica presentata permette di ricavare immediatamente gli elementi circuitali di cui è composto il circuito equivalente della struttura. Dato che la struttura è priva di perdite, nel circuito non compariranno elementi dissipativi, inoltre dalla composizione della (14.15) possiamo realizzare il nostro circuito come la serie di tanti elementi (teoricamente infiniti, ma in pratica la serie viene troncata) reattivi del tipo LC. Osserviamo ora il seguente circuito:



Che ha la seguente impedenza di ingresso:

$$jX_{in}(\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n}}$$

Semplificando j si ottiene la *prima forma canonica di Foster*:

$$X_{in}(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega L_n}{1 - \omega^2 C_n L_n} \tag{14.15}$$

Confrontata con la (14.15) otteniamo per i valori dei componenti C_i, L_i del circuito equivalente in funzione dei coefficienti a, b_n, ω_n $(n = 0,1,2, \dots \infty)$.

$$a = L, \qquad b_0 = -\frac{1}{C} \implies C = -\frac{1}{b_0}$$

$$\frac{\omega L_n}{1 - \omega^2 C_n L_n} = \frac{\frac{\omega}{C_n}}{\frac{1}{C_n L_n} - \omega^2} = \frac{2\omega b_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

da cui:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{C_n L_n}}, \qquad C_n = -\frac{1}{2b_n}, \qquad L_n = -\frac{2b_n}{\omega_n^2}$$

È interessante notare che ad ogni circuito LC è associata una frequenza di risonanza che non è altro che la frequenza del modo eccitato nella struttura. Quindi il circuito equivalente è formato da tanti risonatori LC quanti sono i modi (in teoria infiniti) i cui valori di capacità ed induttanza possono essere ricavati una volta note le frequenze modali ω_0 di cui abbiamo parlato nei capitoli precedenti. Vediamo ora dei metodi che ci permettono di legare questi parametri della 1° forma canonica di *Foster* direttamente ai valori che può assumere la $X_{in}(\omega)$. Basta osservare che la forma di *Foster* non è altro che lo sviluppo in serie della funzione intorno ai poli, quindi le quantità a, b_0, b_n sono i residui della funzione stessa nei poli che possono essere ricavati mediante le relazioni:

$$a = \lim_{\omega \to \infty} \frac{X_{in}(\omega)}{\omega}, \qquad b_0 = \lim_{\omega \to 0} \omega\, X_{in}(\omega), \qquad b_n = \lim_{\omega \to \omega_n} \frac{X_{in}(\omega)}{\omega - \omega_n} \tag{14.15}$$

La funzione $X_{in}(\omega)$ può essere messa in relazione con le grandezze energetiche e con quelle di eccitazione mediante la formula scritta all'inizio del capitolo, pertanto per esempio abbiamo che:

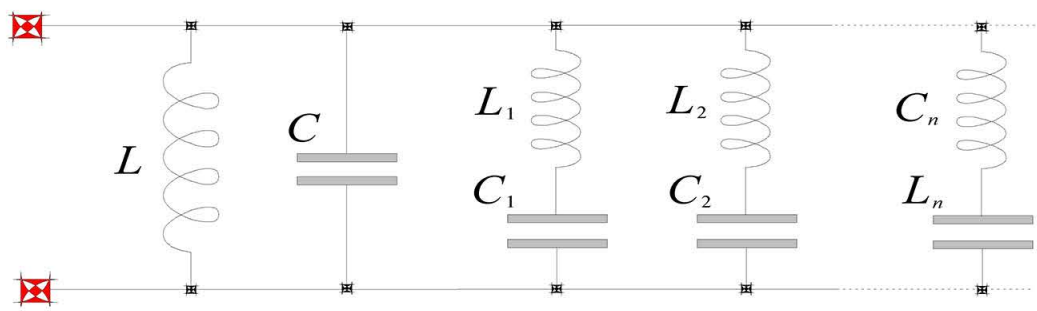
$$b_0 = \lim_{\omega \to 0} \frac{4\omega^2 (W_m - W_e)}{|I|^2} = -\frac{1}{C} \tag{14.16}$$

A questo punto è importante notare che nella risoluzione di questi problemi la conoscenza completa del circuito equivalente non deriva soltanto dai parametri energetici, che contengono le informazioni relative alla struttura interna, ma anche da quelli di eccitazione che sono caratteristici della bocca di ingresso e pertanto contengono l'informazione su come è realizzato l'accoppiamento con la struttura guidante.

Un altro metodo di sintesi della struttura consente di ricavare un circuito equivalente, a partire dalla conoscenza della funzione di suscettanza $B_{in}(\omega)$ (o meglio della sua derivata) nell'intorno dei poli. Tenendo conto che la $B_{in}(\omega)$ gode delle stesse proprietà della funzione $X_{in}(\omega)$ si può arrivare ad un suo sviluppo in serie detto *seconda forma canonica di Foster*:

$$B_{in}(\omega) = \omega c - \frac{d_0}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega d_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \tag{14.17}$$

che equivale ad un circuito del tipo:



dove i circuiti risonanti serie rappresentano i poli della $B_{in}(\omega)$ in corrispondenza della frequenza di risonanza $\omega_n = 1/(C_n L_n)$. Dato che il circuito è senza perdite vale la:

$$B_{in}(\omega) = -\frac{1}{X_{in}(\omega)}$$

per cui soltanto in questo caso particolare i poli della $B_{in}(\omega)$ sono gli zeri della $X_{in}(\omega)$ e viceversa. Se la nostra struttura ad una bocca è rappresentata da un risonatore a cavità questa può essere schematizzata attraverso una delle due forme canoniche di *Foster* in cui i circuiti risonanti hanno delle frequenze di risonanza uguali a quelle

dei modi della cavità stessa. Se alimento il circuito equivalente ad una frequenza che è prossima alla frequenza dell'i-esimo modo allora risuona soltanto i-esimo circuito C_iL_i che pertanto predominerà sugli altri nel calcolo di $X_{in}(\omega)$ o $B_{in}(\omega)$. Per esempio, se alimento con una frequenza ω_i il circuito relativo alla 1° forma canonica di *Foster* tutti i termini della (14.15) saranno trascurabili tranne quello che ha la frequenza $\omega_i \approx \omega_0$ per cui:

$$\begin{aligned} X_{in}(\omega) &\cong \frac{2\omega b_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \\ B_{in}(\omega) &\cong -\frac{\omega^2 - \omega_i^2}{2\omega b_i} \end{aligned} \quad \text{per } \omega \approx \omega_i$$

Nell'intorno di tale frequenza possiamo trovare anche l'andamento delle derivate di X_{in} e B_{in}.

$$\frac{dB_{in}(\omega)}{d\omega} = \frac{2\omega(2\omega b_i) - 2b_i(\omega^2 - \omega_i^2)}{4\omega^2 b_i^2} = -\frac{\omega^2 - \omega_i^2}{2\omega b_i}$$

che ci fornisce la pendenza della curva $B_{in}(\omega)$ nelle vicinanze del polo $\omega = \omega_i$, ma dato che la $B_{in}(\omega)$ è monotona crescente la pendenza deve essere sempre positiva (evidentemente b_i è negativa). Per $\omega = \omega_i$ si ha:

$$\left.\frac{dB_{in}(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_i} = -\frac{1}{b_i} \qquad con \;\; b_i = -\frac{|V|^2}{4\,(W_e + W_m)}$$

Quindi il calcolo del residuo b_i, oltre che con un processo al limite, può essere effettuato mediante l'analisi della reattanza di ingresso nell'intorno delle frequenze di risonanza.

14.1 STRUTTURE ATTIVE AD UNA BOCCA

Tutte le strutture studiate fino ad ora sono passive nel senso che non sono in grado di erogare energia elettromagnetica.

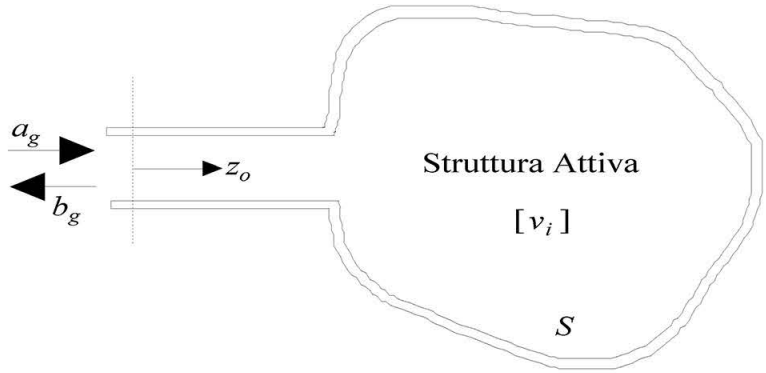


Figura 14.2 - Generatore a microonde.

Studieremo ora una classe di componenti attivi, che vengono utilizzati come sorgenti di microonde. Innanzitutto, ricordiamo che abbiamo considerato la struttura passiva ad una bocca come un dispositivo caratterizzato da:

Matrice Impedenze: $Z_L = V_L/I_L$

Matrice di Scattering: $\Gamma_L = b_L/a_L$

con $V_L = a_L + b_L, I_L = a_L - b_L$

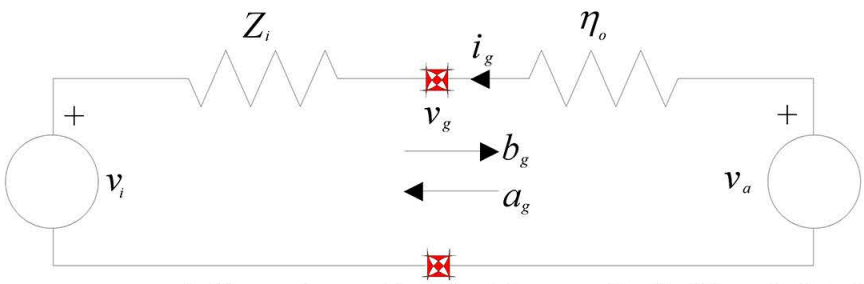
$$Z_L = \frac{a_L + b_L}{a_L - b_L} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

Consideriamo invece una struttura ad una bocca attiva, da cui fluisce una certa potenza, caratterizzata da una certa tensione impressa al suo interno. Chiameremo genericamente generatore una tale struttura che caratterizzeremo attraverso i parametri v_g, i_g.

Oppure a_g, b_g. È importante evidenziare la presenza della tensione v_i interna alla struttura. A differenza delle strutture passive, l'onda riflessa b_g alla bocca del generatore, oltre ad essere dovuta alla riflessione di a_g deve tenere conto anche della tensione impressa interna v_i. Il legame tra b_g e v_i dipende da come il generatore è strutturalmente collegato al circuito in esame e dato che esistono numerosi circuiti equivalenti è chiaro che l'influenza di v_i su b_g dipenderà da questa scelta. Nel nostro caso considereremo un circuito avente un generatore di tensione con impedenza interna Z_i. Le definizioni delle grandezze che caratterizzano la struttura sono:

$$\Gamma_L = \left.\frac{b_g}{a_g}\right|_{v_i=0}; \qquad Z_g = \left.\frac{v_g}{i_g}\right|_{v_i=0}$$

Ora devo legare queste grandezze a v_i questo perché per una struttura attiva si deve tenere conto di un parametro in più, caratteristico del generatore. Il nostro circuito è del tipo:



Si osservi come per v_i=0 l'impedenza Z_i coincida con Z_g. Dall'analisi del circuito si ottengono le relazioni (supporremo che $\eta_0 = 1$):

$$v_a - v_g = i_g\eta_0 = i_g; \qquad i_g = \frac{v_a - v_g}{1+Z_g}; \qquad v_a - v_g = \frac{v_a}{1+Z_g} - \frac{v_i}{1+Z_g}$$

$$v_g = v_a\left[1 - \frac{v_a}{1+Z_g}\right] + \frac{v_i}{1+Z_g} = v_a\frac{Z_g}{1+Z_g} + \frac{v_i}{1+Z_g}$$

introduciamo ora le onde incidenti e riflesse a_g, b_g.

$$\begin{matrix} v_g = a_g + b_g \\ i_g = a_g - b_g \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_g = \frac{v_g + i_g}{2} \\ b_g = \frac{v_g - i_g}{2} \end{matrix}$$

sostituendo:

$$a_g = \frac{1}{2}\left[\frac{v_a Z_g}{1+Z_g} + \frac{v_i}{1+Z_g} + \frac{v_a}{1+Z_g} - \frac{v_i}{1+Z_g}\right] = \frac{v_a}{2}$$

$$b_g = \frac{1}{2}\left[\frac{v_a Z_g}{1+Z_g} + \frac{v_i}{1+Z_g} - \frac{v_a}{1+Z_g} + \frac{v_i}{1+Z_g}\right] = \frac{v_a}{2}\frac{Z_g - 1}{1+Z_g} + \frac{v_i}{1+Z_g} = a_g\frac{Z_g - 1}{Z_g + 1} + \frac{v_i}{1+Z_g}$$

Poiché

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - 1}{Z_g + 1}; \qquad 1 - \Gamma_g = \frac{2}{Z_g + 1}$$

In definitiva abbiamo ottenuto:

$$b_g = \Gamma_g a_g + \mathrm{v}_i \frac{1-\Gamma_g}{2} \qquad (14.18)$$

Questa espressione è importante in quanto fa vedere come nel caso di una struttura attiva, si modifica la relazione di b_g rispetto al caso di carico passivo. In definitiva si può affermare che per una struttura attiva l'onda uscente dal generatore è in parte dovuta alla riflessione di a_g (questo se il generatore non è adattato) ed in parte dovuta alla sorgente interna. Calcoliamoci ora il trasferimento di potenza attraverso la struttura a microonde della figura 14.3.

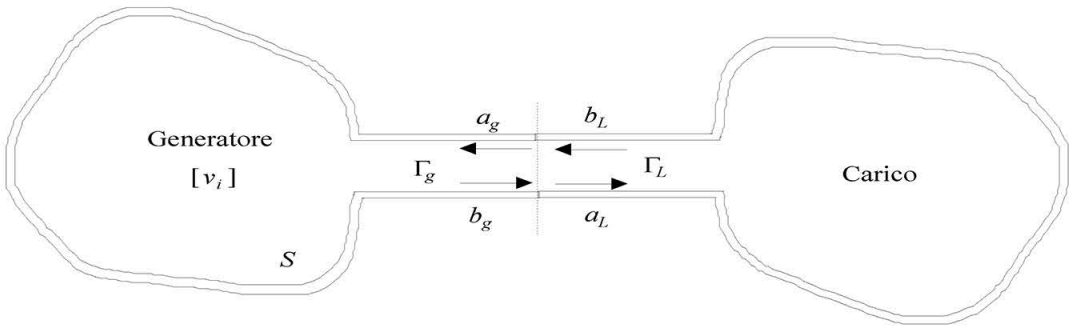


Figura 14.3 - Chiusura di un generatore su di un carico.

Il generatore fornirà una certa potenza al carico che a sua volta ne rifletterà una parte verso il generatore. La potenza media netta assorbita dalla struttura passiva è:

$$P_a = P_{in} - P_{ri}$$

Con la normalizzazione $\eta = 1$ si ha che:

$$P_a = \frac{1}{2}(|a_L|^2 - |b_L|^2) = \frac{1}{2}|a_L|^2(1 - |\Gamma_L|^2)$$

Ma $a_L = b_g$ pertanto:

$$P_a = \frac{|b_g|^2}{2}(1 - |\Gamma_L|^2) \qquad (14.19)$$

Dalla (14.18) abbiamo:

$$b_g = \Gamma_g a_g + v_i \frac{1-\Gamma_g}{2} = \Gamma_g b_L + v_i \frac{1-\Gamma_g}{2}$$

Con $b_L = \Gamma_L a_L$

$$b_g = \Gamma_g \Gamma_L a_L + v_i \frac{1-\Gamma_g}{2} = \Gamma_g \Gamma_L b_g + v_i \frac{1-\Gamma_g}{2}$$

Da cui:

$$b_g = v_i \frac{1 - \Gamma_g}{2\left(1 - \Gamma_g \Gamma_L\right)} \tag{14.20}$$

Sostituendo la (14.20) nella (14.19) otteniamo:

$$P_a = |v_i|^2 \frac{\left|1 - \Gamma_g\right|^2}{8\left|1 - \Gamma_g \Gamma_L\right|^2} \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) \tag{14.21}$$

Questa espressione ci fa vedere come attraverso l'uso dei parametri di Scattering è possibile operare in modo semplificato per il calcolo del trasferimento di potenza, che risulta dipendere dalle caratteristiche del generatore e da quelle del carico. Esistono particolari condizioni che caratterizzano il funzionamento di questi componenti per particolari valori di Γ_L e Γ_g.

a) Consideriamo la condizione di carico adattato. Essendo la linea ad impedenza unitaria, ciò significa considerare il carico chiuso su un'impedenza unitaria, che, dal punto di vista della matrice di Scattering vuol dire $\Gamma_L = 0$. Quindi per la potenza assorbita dal carico adattato si ha:

$$P_a = |v_i|^2 \frac{\left|1 - \Gamma_g\right|^2}{8}$$

a) Consideriamo il caso in cui il solo generatore risulta adattato. Dal punto di vista della matrice di Scattering, ciò significa che $\Gamma_g = 0$. Per la potenza trasferita al carico si ha:

$$P_a = |v_i|^2 \frac{|1 - \Gamma_L|^2}{8}$$

Si noti che nel caso a) tutta la potenza trasferita verso il carico viene assorbita senza riflessioni, mentre ora una parte della P_a viene riflessa verso il generatore.

b) Nel caso in cui sia il generatore che il carico risultino adattati ($\Gamma_g = \Gamma_L = 0$) si ha che la potenza trasferita verso il carico è:

$$P_a = \frac{|v_i|^2}{8}$$

c) Un'ultima situazione che si verifica molto spesso nella realtà è quella in cui $\Gamma_L = \Gamma_g^*$ (per cui $|\Gamma_L| = |\Gamma_g|$). La potenza trasferita al carico è in questo caso:

$$P_a = |v_i|^2 \frac{\left|1-\Gamma_g\right|^2}{8\left|1-\Gamma_g\Gamma_L\right|^2}\ (1-|\Gamma_L|^2) = \frac{|v_i|^2}{8}\frac{\left|1-\Gamma_g\right|^2}{1-\left|\Gamma_g\right|^2}$$

15 STRUTTURE A DUE BOCCHE

Le strutture a due bocche godono di notevoli proprietà di generalità in quanto possono essere pensate come derivate da una struttura ad n bocche in cui le *n-2* bocche rimanenti sono chiuse su carichi adattati. Un esempio di struttura a due bocche è quella di figura 15.1.

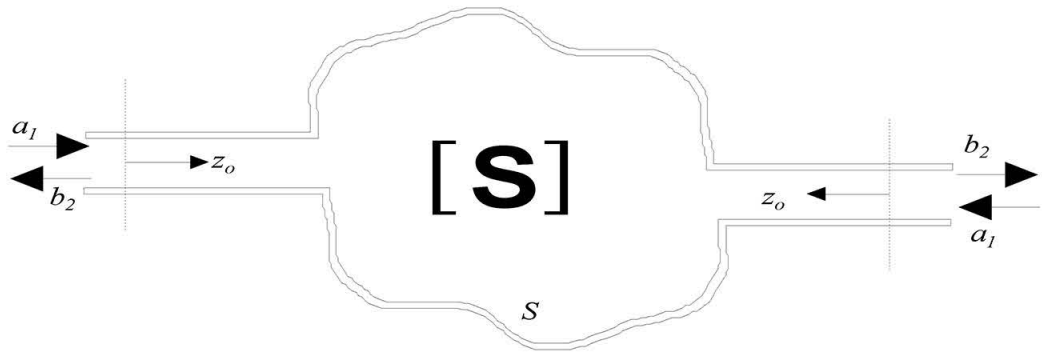


Figura 15.1 - Struttura a 2 bocche.

Questa potrebbe essere per esempio una cavità risonante del tipo a trasmissione usata nelle tecniche di filtri. La sua matrice di scattering sarà del tipo:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \tag{15.1}$$

In generale i quattro parametri sono complessi, pertanto per poter individuare il comportamento della struttura bisogna conoscere 8 grandezze reali (modulo e fase di ogni parametro). Comunque, come già accennato nei capitoli precedenti, se la struttura possiede delle determinate caratteristiche, il numero di grandezze necessarie diminuisce. Supponiamo per esempio che la nostra struttura sia *priva di perdite e non reciproca* ($[S]$ non simmetrica). Avevamo dimostrato nel capitolo 2 che per tali strutture vale la:

$$[S] = ([S]^T)^* = [1]$$

dalla quale si possono ottenere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} &(a) \quad |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ &(b) \quad |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \\ &(c) \quad S_{11}S_{21}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \\ &(d) \quad S_{21}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* = 0 \end{aligned}$$

Le prime due mettono in relazione le sole quantità reali dei parametri di Scattering, mentre le (c) e (d) legano delle quantità complesse. Si noti che la (d) è la complessa

coniugata della (c) e pertanto nella risoluzione del sistema può essere trascurata in quanto ridondante, questo ci permette di affermare che sicuramente non tutte le grandezze sono indipendenti e che pertanto il progettista ha a disposizione un numero minore di 8 gradi di libertà. Scriviamo la (c) in forma polare:

$$|S_{11}||S_{21}|\, e^{j(\theta_{11}-\theta_{21})} + |S_{12}||S_{22}|\, e^{j(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0$$

che affinché sia verificata devono essere soddisfatte le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{ll} (e) & |S_{11}||S_{21}| = |S_{12}||S_{22}| \\ (f) & \theta_{11} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{22} + \pi \end{array}$$

pertanto, le relazioni $(a), (b), (e), (f)$ costituiscono il sistema da risolvere. Mediante le prime tre equazioni possono essere determinati tre moduli in funzione del quarto (che resta la grandezza da fissare), per esempio dalla (e) si ha:

$$|S_{22}| = \frac{|S_{11}||S_{21}|}{|S_{12}|}$$

che sostituita nella (b) da luogo:

$$|S_{21}|^2 + \frac{|S_{11}||S_{21}|}{|S_{12}|} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|S_{21}|^2}{|S_{12}|^2}(|S_{12}|^2 + |S_{11}|^2) = 1$$

ma il termine entro le parentesi non è altro che la (a), pertanto si ottiene:

$$|S_{12}| = |S_{21}| \tag{15.2}$$

Questa relazione è importante in quanto mette in evidenza che, anche nel caso di struttura non reciproca, risulta verificata l'uguaglianza dei moduli (nel caso reciproco si ha $S_{21} = S_{12}$). Dalle $(a), (b)$ e dalla (15.2) si ottiene:

$$\begin{array}{c} |S_{11}| = |S_{22}| \\ |S_{12}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} \end{array} \tag{15.3}$$

Per quanto riguarda le fasi, anche queste non sono tutte indipendenti in quanto la relazione (f) permette di fissare in maniera arbitraria almeno una delle fasi (ciò è equivalente a fissare la lunghezza della linea di accesso di una delle due bocche, come abbiamo dimostrato nei precedenti capitoli). Se il componente è anche reciproco allora la matrice di Scattering è simmetrica e quindi $\theta_{21} - \theta_{12}$. In questo caso i parametri di fase a disposizione del progettista sono due.

Vediamo ora il comportamento della struttura a due bocche quando viene chiusa su un carico avente un coefficiente di riflessione $\Gamma_L = b_L/a_L$ (vedi figura 15.2).

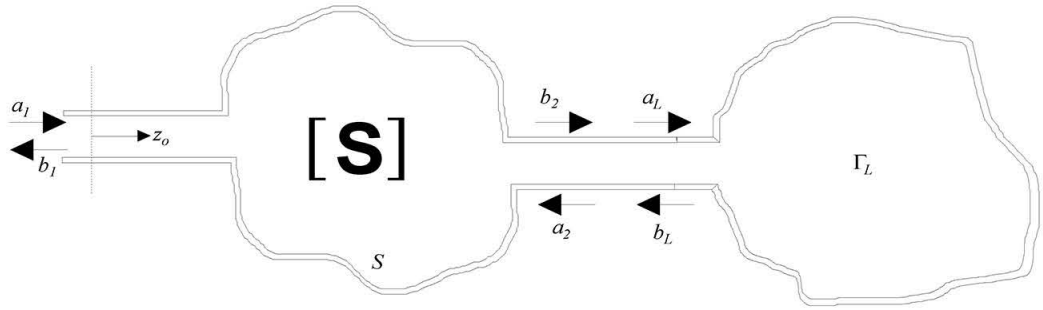


Figura 15.2 - Struttura a 2 bocche chiusa sul carico.

Calcoliamo il coefficiente di riflessione alla bocca 1. Dalla (15.1) si ha:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}\Gamma_L b_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_L b_2 \end{aligned} \tag{15.4}$$

dalla seconda delle (15.4) si ricava:

$$b_2(1 - S_{22}\Gamma_L) = S_{21}a_1 \quad \Longrightarrow \quad b_2 = \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)}a_1$$

che sostituita nella prima delle (15.5) da:

$$b_1 = S_{11}a_1 + \frac{S_{12}\Gamma_L\, S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)}a_1 \quad = a_1\left(S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L\, S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)}\right)$$

Quindi il coefficiente di riflessione alla bocca 1 sarà:

$$\Gamma_1 = \left(S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L\, S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)}\right) \tag{15.5}$$

Si noti che nel caso che il carico risulti adattato il coefficiente di riflessione diventa $\Gamma_1 = S_{11}$. In maniera analoga si possono interpretare gli altri parametri della matrice $[S]$ che in condizioni di adattamento sono:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0}$$
$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0}$$

I parametri S_{12} e S_{21} rappresentano i parametri di trasferimento della tensione da una bocca all'altra in condizioni di adattamento dell'uscita. In generale sappiamo che per strutture a due bocche (senza perdite e non reciproche) le misure da effettuare sono quattro. In alcuni sistemi, effettuare le misure su tutte le porte,

risulta un compito molto arduo dal punto di vista della strumentazione usata. Per esempio, la misura del parametro S_{11} necessita di un trasmettitore che invii un'onda a_1 e di un ricevitore che prelevi un'onda b_1 dalla stessa bocca e questo non è sempre realizzabile. A questo inconveniente si può ovviare effettuando una serie di misure sempre sulla stessa bocca, utilizzando la relazione (15.5). Si noti che questa contiene tutti i parametri della matrice di scattering che vogliamo misurare, ed il coefficiente di riflessione del carico connesso in uscita. Dato che i parametri di Scattering sono ovviamente indipendenti dal carico, posso effettuare 4 misure con altrettanti carichi aventi differenti coefficienti di riflessione, ottenendo così 4 valori del coefficiente di riflessione Γ_1. In questa maniera si ottiene un sistema formato da 4 equazioni simili alla (15.5), con 4 incognite che ammette per soluzione i valori dei parametri di Scattering. Vediamo in dettaglio come si può effettuare la misura.

a) Ovviamente la prima misura di Γ_1 la effettuo con la seconda bocca adattata ($\Gamma_L = 0$) ottenendo così la misura diretta di S_{11}.

$$\Gamma_L = 0 \qquad \Gamma_1 = \Gamma_0 = S_{11}$$

b) La seconda misura la effettuo con la seconda bocca in corto circuito, infatti ciò equivale ad applicare un carico con Γ_L=-1 dato che su un corto circuito $a_2 = -b_2$ ($V_2 = a_2 + b_2 = 0$). Ottengo così:

$$\Gamma_L = -1 \qquad \Gamma_1 = \Gamma_{sc} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}}$$

c) La terza misura la effettuo con la seconda bocca in circuito aperto, ciò equivale ad applicare un carico con Γ_L=1 dato che su un circuito aperto $a_2 = b_2$ ($I_2 = a_2 - b_2 = 0$). Ottengo così:

$$\Gamma_L = 1 \qquad \Gamma_1 = \Gamma_{oc} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}}{1 - S_{22}}$$

Quindi posso scrivere che:

$$\Gamma_0 - \Gamma_{sc} = \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}} \quad \Rightarrow \quad S_{12}S_{21} = (\Gamma_0 - \Gamma_{sc})(1 + S_{22})$$

Inoltre:

$$\Gamma_{0c} - \Gamma_0 = \frac{S_{12}S_{21}}{1 - S_{22}} \quad \Rightarrow \quad S_{12}S_{21} = (\Gamma_{0c} - \Gamma_0)(1 - S_{22})$$

per cui:

$$\frac{(1+S_{22})}{(1-S_{22})}=\frac{(\Gamma_{0c}-\Gamma_0)}{(\Gamma_0-\Gamma_{sc})}=a$$

$$(1+S_{22})=a(1-S_{22}) \quad \Longrightarrow \quad S_{22}=\frac{a-1}{a+1}=\frac{\Gamma_{0c}+\Gamma_{sc}-2\Gamma_0}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}}$$

$$S_{12}S_{21}=(\Gamma_{0c}-\Gamma_0)\left(1-\frac{\Gamma_{0c}+\Gamma_{sc}-2\Gamma_0}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}}\right) \quad \Longrightarrow \quad S_{12}S_{21}=2\frac{(\Gamma_0-\Gamma_{sc})(\Gamma_{0c}-\Gamma_0)}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}}$$

Quindi le tre seguenti formule ci consentono di ricavare le quantità:

$$\begin{aligned} S_{11}&=\Gamma_0 \\ S_{22}&=\frac{\Gamma_{0c}+\Gamma_{sc}-2\Gamma_0}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}} \\ S_{12}S_{21}&=2\frac{(\Gamma_0-\Gamma_{sc})(\Gamma_{0c}-\Gamma_0)}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}} \end{aligned} \tag{15.6}$$

Per ottenere tutti i parametri sarebbe necessaria una quarta misura con un carico diverso dai tre mostrati, comunque nei casi pratici la struttura è reciproca per cui la $[S]$ è simmetrica e quindi la terza delle (15.6) diviene:

$$|S_{12}|^2=2\frac{(\Gamma_0-\Gamma_{sc})(\Gamma_{0c}-\Gamma_0)}{\Gamma_{0c}-\Gamma_{sc}} \tag{15.7}$$

Nel caso di struttura priva di perdite invece vale la (15.2) ($|S_{21}|=|S_{12}|$) per cui riesco a trovare il modulo $|S_{12}|^2$ ma non la fase. In tutti gli altri casi, come abbiamo già detto, sono necessarie 4 misure. Nei capitoli precedenti avevamo visto che nelle tecniche a microonde le condizioni di corto circuito e circuito aperto non erano molto semplici da ottenere, senza tenere conto che il generatore può risentire di queste condizioni di chiusura modificando le proprie caratteristiche (introducendo delle oscillazioni indesiderate se il circuito è non lineare) o addirittura danneggiandosi, per cui, dove è possibile conviene lavorare con carichi adattati ad entrambe le bocche (vedi definizione dei parametri S_{ij}. Una struttura funzionante da carico variabile può essere realizzata mediante un tratto di linea con un pistone mobile. Infatti, sappiamo che l'impedenza che vedo in una certa sezione è una funzione (periodica della lunghezza di linea considerata) che può assumere i valori compresi tra zero ed infinito rendendo possibile così la realizzazione di corto circuiti e di circuiti aperti.

15.1 PERDITE DI INSERZIONE

Consideriamo le due configurazioni circuitali mostrate nelle figure 15.5 e 15.6.

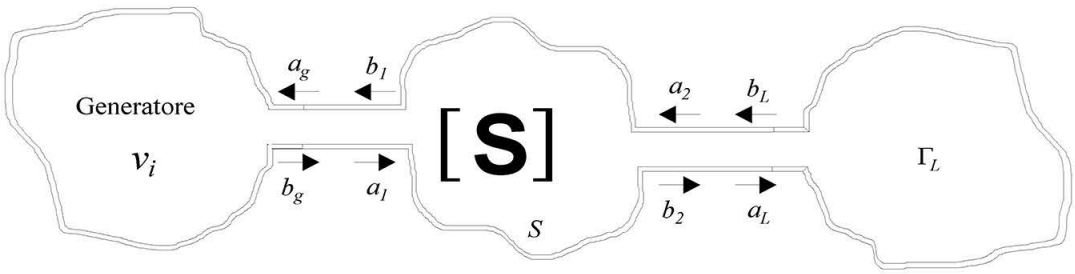


Figura 15.5 - Struttura a 2 bocche chiusa tra carico e generatore.

La prima mostra la nostra struttura due bocche alimentata da un generatore e chiusa contemporaneamente su un carico, mentre la seconda mostra il carico chiuso direttamente sul generatore.

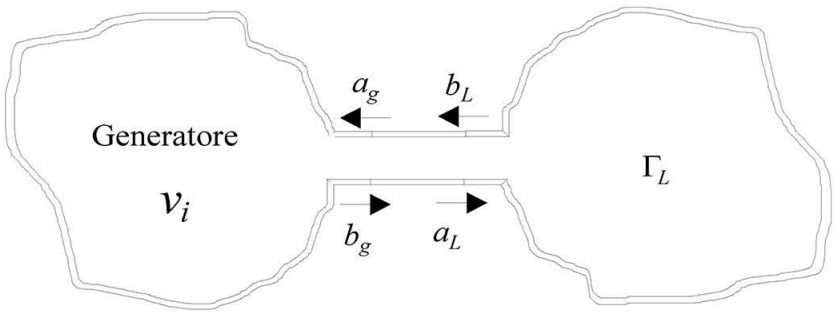


Figura 15.6 - Connessione tra generatore e carico.

Si definisce *perdita di inserzione* $\mathbb{L}$ della struttura 10 volte il logaritmo di base dieci del rapporto tra la potenza fornita dal generatore al carico nella situazione di figura 15.6 e la potenza fornita dal generatore al carico nella situazione di figura 15.5.

$$\mathbb{L} = 10 \log \frac{P_I}{P_{II}} \tag{15.8}$$

In alcuni casi si può verificare che la perdita di inserzione $\mathbb{L}$ per strutture 2 bocche dissipative sia una quantità negativa (cioè $P_{II} > P_I$), anche se sarebbe logico pensare che la struttura dissipativa, quando viene inserita, possa sottrarre potenza al carico e che quindi $\mathbb{L} > 0$ ($P_{II} < P_I$). Questo accade in tutti quei casi in cui l'inserzione della struttura dissipativa migliora l'adattamento tra il generatore ed il carico, migliorando così il trasferimento di potenza. Troviamo ora l'espressione di $\mathbb{L}$ in funzione dei parametri di scattering del componente a due bocche. Avevamo già trovato che, nella situazione di figura 15.6, la potenza trasferita al carico è:

$$P_I = |v_i|^2 \frac{(1-|\Gamma_L|^2)\left|1-\Gamma_g\right|^2}{8\left|1-\Gamma_g\Gamma_L\right|^2} \tag{15.9}$$

Per trovare la P_{II} dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{ll}
(a) & b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\
(b) & b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\
(c) & b_g = \Gamma_g a_g + v_i \dfrac{1-\Gamma_g}{2} \\
(d) & b_L = \Gamma_L a_L \\
(e) & a_1 = b_g \\
(f) & b_1 = s_g \\
(g) & a_2 = b_L \\
(h) & b_2 = b_L
\end{array}$$

Sostituisco le ultime quattro equazioni nelle $(a), (b)$.

$$\begin{array}{ll}
(a) & a_g = S_{11}b_g + S_{12}b_L \\
(b) & a_L = S_{21}b_g + S_{22}b_L \\
(c) & b_g = \Gamma_g a_g + v_i \dfrac{1-\Gamma_g}{2} \\
(d) & b_L = \Gamma_L a_L
\end{array}$$

La potenza fornita al carico in questa situazione è:

$$P_{II} = \frac{1}{2}(|a_L|^2 - |b_L|^2) = \frac{1}{2}|a_L|^2(1-|\Gamma_L|^2)$$

per cui devo trovare a_L in funzione dei parametri della $[S]$.

Sostituisco la (d) nelle (a) e (b)

$$\begin{array}{ll}
(a) & a_g = S_{11}b_g + S_{12}\Gamma_L a_L \\
(b) & a_L = S_{21}b_g + S_{22}\Gamma_L a_L \\
(c) & b_g = \Gamma_g a_g + v_i \dfrac{1-\Gamma_g}{2}
\end{array}$$

Sostituisco la (a) nella (c)

$$\begin{array}{ll}
(b) & a_L(1-S_{22}\Gamma_L) = S_{21}b_g \\
(c) & b_g = \Gamma_g S_{11}b_g + \Gamma_g S_{12}\Gamma_L a_L + v_i \dfrac{\left(1-\Gamma_g\right)}{2}
\end{array}$$

Che può anche essere scritto come:

$$(b) \qquad a_L = \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)} b_g$$

$$(c) \quad b_g = \frac{\Gamma_g \Gamma_L S_{12}}{(1 - \Gamma_g S_{11})} a_L + \frac{(1 - \Gamma_g)}{2(1 - \Gamma_g S_{11})} v_i$$

Sostituendo la (*c*) nella (*b*)

$$a_L = \frac{\Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11})} a_L + \frac{(1 - \Gamma_g) S_{21}}{2(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11})} v_i$$

da cui:

$$a_L \left[1 - \frac{\Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11})} \right] = \frac{(1 - \Gamma_g) S_{21}}{2(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11})} v_i$$

L'onda incidente sul carico è quindi:

$$a_L = \frac{1}{2} \frac{(1 - \Gamma_g) S_{21}}{[(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11}) - \Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}]} v_i \tag{15.10}$$

La potenza trasferita è:

$$P_{II} = \frac{1}{8} \frac{|1 - \Gamma_g|^2 |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - \Gamma_g S_{11}) - \Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}|^2} |v_i|^2 \tag{15.11}$$

Quindi la perdita di inserzione diviene:

$$\mathbb{L} = 10 \log \frac{|(1 - \Gamma_L S_{22})(1 - \Gamma_g S_{11}) - \Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}|^2}{|S_{21}|^2 |1 - \Gamma_g \Gamma_L|^2} \tag{15.12}$$

Come si può vedere $\mathbb{L}$ è funzione del carico (Γ_L), del generatore (Γ_g) e della struttura a due bocche [S]. Il significato fisico dell'espressione può essere individuato esaminando i vari termini di cui è composta. Nel prodotto $\Gamma_g S_{11}$ si riconosce l'influenza delle riflessioni che avvengono alla bocca 1, nel senso che l'onda uscente dal generatore viene in parte riflessa a causa di S_{11}, e che l'onda riflessa viene ulteriormente riflessa da Γ_g. Quindi il termine $\Gamma_g S_{11}$ toglie potenza al termine 1, mediante riflessioni multiple sulla bocca 1. La stessa osservazione vale per il termine $\Gamma_L S_{22}$ nei confronti della bocca 2. Il termine $\Gamma_g \Gamma_L S_{12} S_{21}$ rappresenta invece le riflessioni multiple tra le due bocche.

Nel caso in cui il generatore ed il carico sono adattati, la perdita di inserzione è una misura diretta dell'attenuazione introdotta dalla struttura dalla bocca 1 alla 2.

$$\mathcal{A}_{12} = 10\ \log\frac{1}{|S_{21}|^2} \tag{15.13}$$

Questo parametro non dipende dalle chiusure della struttura come è logico che sia, inoltre per componenti reciproci, dato che $S_{21} = S_{12}$, il componente introduce la stessa attenuazione indipendentemente dal modo in cui viene inserito ($\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21}$) (Osservare che questo è vero anche per componenti senza perdite). Ciò ci consente di affermare che se un componente trasmette in un solo senso questo sarà senz'altro un componente con perdite. Si noti ora con attenzione che il fatto che si sia imposto $\Gamma_g = 0$ non significa necessariamente che non vi siano riflessioni verso il generatore, infatti queste sono generate dalla struttura chiusa sul generatore.

Nella situazione in cui il carico ed il generatore sono adattati, posso calcolare la potenza incidente e riflessa alla bocca 1.

$$P_i = \frac{1}{2}|a_1|^2 \quad ma \quad a_1 = b_g = \frac{v_i}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad P_i = \frac{1}{8}|v_i|^2$$

$$P_r = \frac{1}{2}|b_1|^2 \quad ma \quad b_1 = S_{11}a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad P_r = \frac{1}{2}|S_{11}|^2|a_1|^2$$

Pertanto, la potenza che il generatore trasmette alla struttura due bocche è:

$$P_t = P_i - P_r = \frac{1}{2}|a_1|^2(1 - |S_{11}|^2)$$

Si definisce attenuazione per riflessione la seguente espressione:

$$\mathcal{A}_r = 10\ log\frac{P_i}{P_r} = 10\ log\frac{1}{1 - |S_{11}|^2} \tag{15.14}$$

L'attenuazione $\mathcal{A}_r$ è dovuta al solo fatto che alla bocca 1 esiste una riflessione della struttura. La potenza P_t trasmessa dal generatore alla struttura attraversa la struttura stessa (che in generale avrà delle perdite) ed infine arriva al carico attraverso l'onda b_2 ($a_2 = 0$ in quanto $\Gamma_L = 0$). La potenza trasmessa al carico sarà:

$$P_L = \frac{1}{2}|b_2|^2 \quad ma \quad b_2 = S_{21}a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad P_L = \frac{1}{2}|S_{21}|^2|a_1|^2$$

Se la potenza trasmessa alla struttura differisce da quella fornita dalla struttura al carico ($P_t = P_L$) vuol dire che la struttura è dissipativa, pertanto viene definito il seguente parametro detto attenuazione per dissipazione:

$$\mathcal{A}_d = 10\ \log\frac{P_t}{P_L} = 10\ \log\frac{1-|S_{11}|^2}{|S_{21}|^2} \tag{15.15}$$

Per componenti privi di perdite logicamente si ha che $P_t = P_L$ e pertanto $\mathcal{A}_d = 0$, infatti avevamo visto che in questi casi vale la relazione:

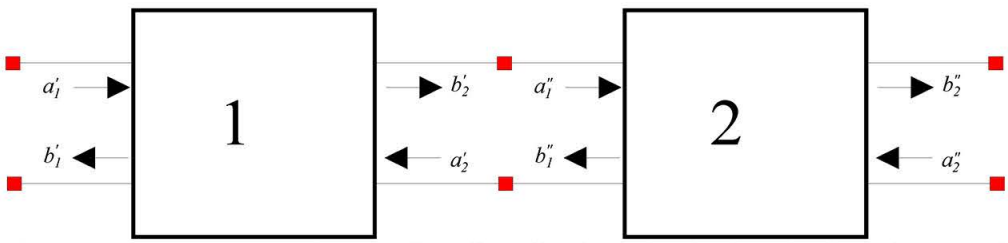
$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - |S_{11}|^2 = |S_{12}|^2 = |S_{21}|^2$$

L'attenuazione totale è la somma delle (15.14) e (15.15)

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_r + \mathcal{A}_d = 10\ \log\frac{1}{|S_{21}|^2} \tag{15.16}$$

15.2 Matrici di Trasferimento.

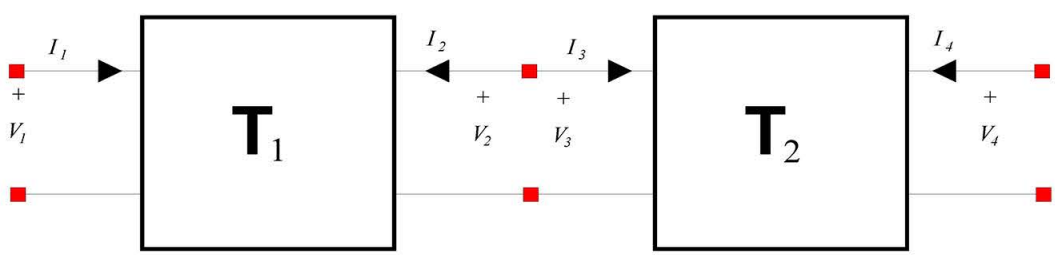
L'utilizzo dei parametri della matrice di Scattering presenta dei problemi nel caso in cui vogliamo studiare una cascata di strutture a due bocche. Lo svantaggio dei parametri della matrice $[S]$ è dovuto al fatto che questi non consentono di stabilire un legame semplice tra le grandezze in ingresso con quelle di uscita della cascata.



Un primo strumento per lo studio di tali situazioni circuitali è la matrice di trasferimento $[\mathcal{T}]$ così definita:

$$[\mathcal{T}] \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{matrix} V_1 = \mathcal{A}V_2 - \mathcal{B}I_2 \\ I_1 = \mathcal{C}V_2 - \mathcal{D}I_2 \end{matrix} \tag{15.17}$$

Queste due relazioni consentono un legame diretto delle grandezze di ingresso in funzione di quelle di uscita (il segno meno è una convenzione che viene usata in quanto le correnti vengono assunte entranti nella rete 2 porte pertanto la corrente che entra nella seconda rete ha il verso di $-I_2$)



$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{\mathcal{T}_1}] \begin{vmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} V_3 \\ I_3 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{\mathcal{T}_2}] \begin{vmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{vmatrix}$$

Dato che $V_3 = V_2$ ed $I_3 = -I_2$

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{\mathcal{T}_1}][\boldsymbol{\mathcal{T}_2}] \begin{vmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{vmatrix}$$

Quindi la matrice di trasmissione di una cascata di reti non è altro che il prodotto delle rispettive matrici di trasmissione. È chiaro ora come questa proprietà faciliti sia lo studio che una eventuale implementazione al calcolatore delle strutture in cascata. Vediamo quali implicazioni ha la proprietà di reciprocità sulla matrice $[\boldsymbol{\mathcal{T}}]$.

Ricaviamo V_2 dalla seconda delle (15.17) e sostituiamolo nella prima ottenendo:

$$V_1 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} I_1 + \frac{\mathcal{AD} - \mathcal{BC}}{\mathcal{C}} I_2$$
$$V_2 = \frac{1}{\mathcal{C}} I_1 + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{C}} I_2$$

Questa non è altro che la matrice $[Z]$ per la quale sappiamo che la proprietà di reciprocità implica $Z_{12} = Z_{21}$, quindi:

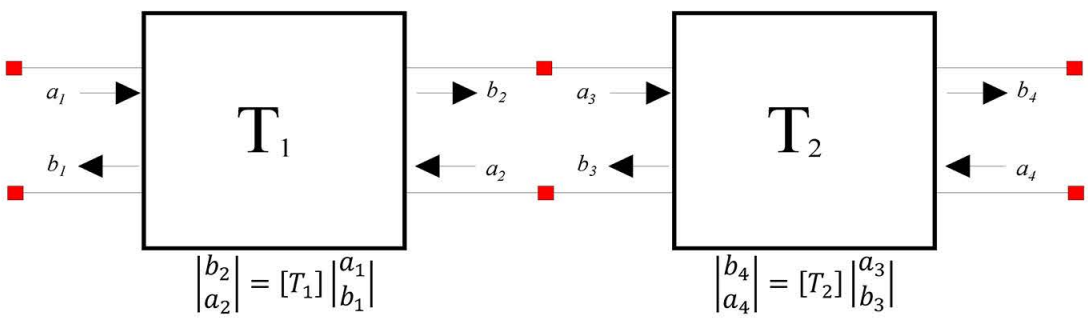
$$\frac{\mathcal{AD} - \mathcal{BC}}{\mathcal{C}} = \frac{1}{\mathcal{C}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{AD} - \mathcal{BC} = \det[\boldsymbol{\mathcal{T}}] = 1$$

15.3 Matrici di Trasmissione.

Un secondo strumento per lo studio delle cascate di reti è la matrice di trasmissione $[T]$ così definita:

$$[T] \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} b_2 &= t_{11} a_1 + t_{12} b_1 \\ a_2 &= t_{21} a_1 + t_{22} b_1 \end{aligned} \qquad [15.18]$$

Queste relazioni legano direttamente le onde alla bocca 2 in funzione delle onde alla bocca di ingresso



Dato che $b_2 = a_3$ e $b_3 = a_2$ si ottiene:

$$\begin{vmatrix} b_4 \\ a_4 \end{vmatrix} = [T_2][T_1] \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix}$$

Vediamo ora come sia possibile ricavare la $[T]$ dalla matrice di Scattering $[S]$. Dato che:

$$t_{11} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{b_1=0}$$

e che vale la (15.1), imponendo la condizione di b_1=0 otteniamo dalla prima che:

$$a_1 = -a_2 \frac{S_{12}}{S_{11}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 = -a_1 \frac{S_{11}}{S_{21}}$$

che sostituita nella seconda delle [15.18] da:

$$b_2 = \left(S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}}\right) a_1$$

per cui

$$t_{11} = \left(S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}}\right)$$

Per trovare gli altri parametri di $[T]$ si opera in maniera analoga. Vediamo ora delle strutture particolari a due bocche frequentemente impiegate nelle tecniche a microonde

15.4 SFASATORE

Lo sfasatore è un componente reciproco privo di perdite. Quindi se adatto la bocca di uscita all'ingresso non ho riflessioni. Questo implica che:

$$S_{11} = 0, \qquad S_{22} = 0$$

Poiché è reciproco la matrice $[S]$ è simmetrica per cui:

$$S_{12} = S_{21}$$

ed essendo inoltre privo di perdite deve valere la:

$$|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |S_{12}| = 1$$

Quindi per tali componenti la matrice $[S]$ si presenta come:

$$[S] = e^{j\varphi_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

per cui il progettista ha a disposizione il parametro φ_{12} che rappresenta l'angolo di fase tra l'ingresso e l'uscita (sfasamento). Uno sfasatore variabile si può realizzare, per esempio, mediante un tratto di guida a sezione rettangolare in cui una lastra di materiale dielettrico (non dissipativo) è posta in modo tale da intercettare il campo elettrico del modo fondamentale TE_{10} (vedi figura 15.7).

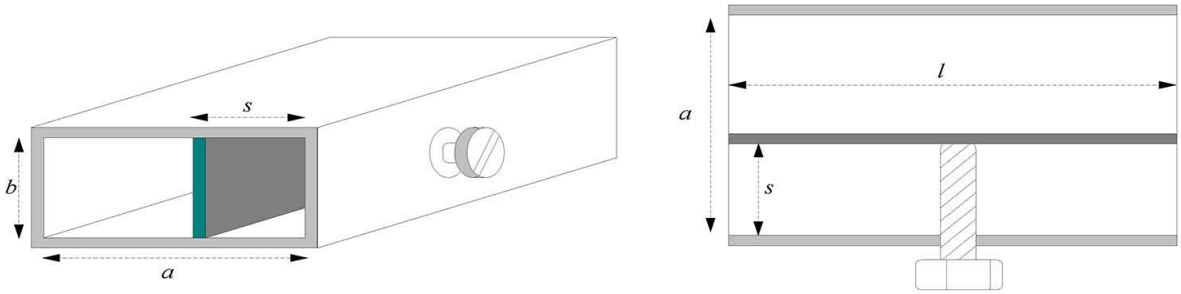


Figura 15.7 - Sfasatore variabile.

Il campo elettrico in questo caso è verticale con il massimo al centro del lato maggiore, ed è proprio in questo punto che la lastra dielettrica introduce il massimo sfasamento. Si potrebbe ragionare anche in termini della costante β_z che sarà funzione della posizione s della lastra, ottenendo così una differenza di fase tra ingresso ed uscita di:

$$\varphi_{12} = [\beta_z(s) - \beta_z(0)]l$$

dove l è la lunghezza della lastra nella direzione delle z. Si deve fare attenzione al fatto che le superfici trasverse alla direzione di propagazione dell'onda incidente provocano riflessioni (attenuazione per riflessione), pertanto la lastra viene affilata ai bordi a coda di rondine.

15.5 Attenuatore

Abbiamo visto che esistono due tipi di attenuazione, per riflessione e per dissipazione, comunque in pratica vengono realizzati solo attenuatori a dissipazione in quanto non presentano onda riflessa alla bocca alimentata (dissipata per effetto *Joule*) che altrimenti causerebbe noiosi disadattamenti del sistema complessivo.

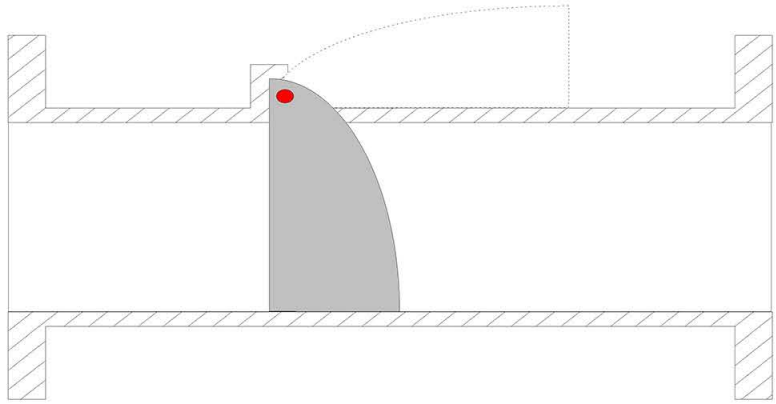


Figura 15.8 - Attenuatore variabile.

Quindi tali componenti sono reciproci con perdite. Questo si traduce in una simmetria della $[S]$ e nella:

$$S_{11} = 0 \qquad S_{22} = 0$$

in quanto non abbiamo riflessioni. Quindi la $[S]$ si presenta come:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} \\ S_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi le relazioni (15.14) e (15.15) sono rispettivamente:

$$\mathcal{A}_r = 0 \qquad \mathcal{A}_d = 10 \log \frac{1}{|S_{21}|^2}$$

Gli attenuatori possono attenuare di una quantità fissa (come capita nei sistemi trasmissivi e nei ricevitori), ma spesso sono regolabili. In maniera molto simile allo sfasatore, l'attenuatore può essere realizzato introducendo un materiale dissipativo in una guida a sezione rettangolare in modo che intercettando il campo elettrico del modo fondamentale TE_{10} generi dissipi energia per effetto *Joule*. Il materiale dissipativo si presenta come una lastra di grafite che viene introdotta più o meno (in dipendenza dell'attenuazione desiderata) attraverso una fessura longitudinale praticata sulla parete più larga della guida (vedi figura 15.8) (si dimostra che una fessura di tale tipo non irradia in quanto non interrompe le linee di corrente che scorrono sulle pareti). In questo modo ottengo attenuazioni variabili tra $0 \div 40dB$.

15.6 Isolatore

L'isolatore è un componente non reciproco quindi con una matrice di Scattering non simmetrica, ma con un coefficiente di riflessione alla bocca di ingresso (quando l'altra è adattata) nullo. Quindi la $[S]$ si presenta come:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} \\ S_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

La proprietà di un buon isolatore è quella di consentire il passaggio di energia dalla bocca 1 alla 2 con l'attenuazione più bassa possibile, e attenuare più possibile le onde entranti alla bocca 2. Un componente così fatto non può non essere senza perdite in quanto ciò implicherebbe che $|S_{12}| = |S_{21}|$ per cui dalla (15.16) avrei uguali attenuazioni in entrambi i sensi, e ciò non è possibile. L'attenuazione dalla bocca 1 alla 2 e dalla bocca due alla 1 sarà rispettivamente:

$$\mathcal{A}_{12} = 10\ \log\frac{1}{|S_{21}|^2} \qquad \mathcal{A}_{21} = 10\ \log\frac{1}{|S_{12}|^2}$$

per cui dovendo essere $\mathcal{A}_{12} \cong 0$ e $\mathcal{A}_{21} \cong \infty$ i parametri dovranno essere:

$$|S_{21}| \cong 1, \qquad |S_{12}| \cong 0$$

È chiaro come la presenza di dissipatori nella struttura renda impossibile non avere attenuazione dalla porta 1 alla 2 (nella pratica si ottengono attenuazioni minime di $0.2 \div 0.3\ dB$), così pure è impossibile avere attenuazione infinita nella direzione $2 \Longrightarrow 1$ (in genere si ottengono attenuazioni di $30 \div 40\ dB$).

16 STRUTTURE A TRE BOCCHE

Studiamo ora le proprietà principali delle strutture a tre bocche che possono essere ricavate dalle matrici di Scattering. Una struttura a tre bocche come quella di figura 16.1 ha la seguente matrice di Scattering.

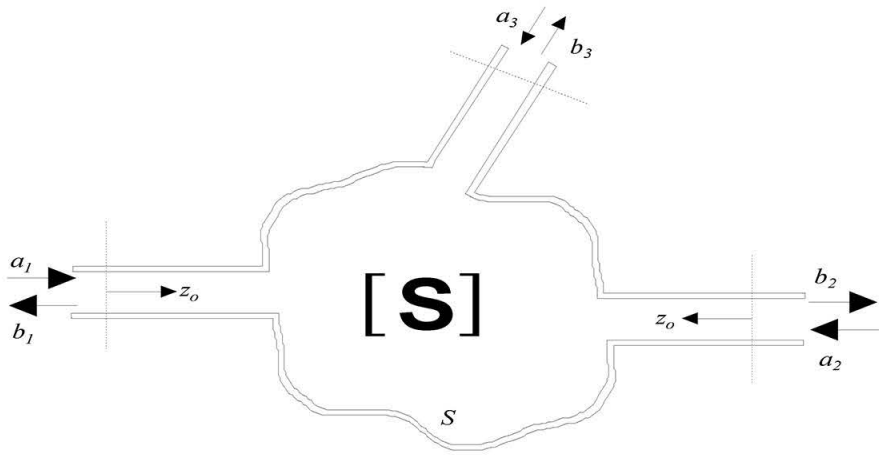


Figura 16.1 - Struttura a tre bocche.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{16.1}$$

È intuitivo pensare come, all'aumentare delle bocche a disposizione, sia possibile progettare un numero di componenti con caratteristiche diverse sempre maggiore. In questo caso abbiamo 9 grandezze complesse su cui lavorare, che divengono 18 reali nel caso si separino in moduli e fasi (abbiamo infinito alla 18 possibili dispositivi da realizzare). Una prima riduzione dei 18 parametri si ha quando lavoriamo con strutture reciproche per le quali la $[S]$ è simmetrica:

$$S_{12} = S_{21} \qquad S_{31} = S_{13} \qquad S_{32} = S_{23}$$

in questo caso abbiamo 6 parametri complessi indipendenti. Se inoltre la struttura è priva di perdite la $[S]$ è una matrice unitaria, per cui:

$$[S]([S]^T)^* = [1]$$

$$\begin{aligned} &(a) \quad |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ &(b) \quad |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ &(c) \quad |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \\ &(d) \quad S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \\ &(e) \quad S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{23}^* + S_{13}S_{33}^* = 0 \\ &(f) \quad S_{12}S_{13}^* + S_{22}S_{23}^* + S_{23}S_{33}^* = 0 \end{aligned} \tag{16.2}$$

che rappresentano 9 relazioni con 12 parametri reali. Anche nel caso di strutture reciproche e prive di perdite si possono realizzare un'infinità di componenti, che comunque possono essere ridotti se si tiene conto di alcune proprietà fondamentali ricavabili dalle equazioni ora scritte.

Per esempio, dimostriamo ora che non è possibile realizzare un componente a tre bocche in cui si abbia contemporaneamente:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \tag{16.3}$$

ciò e equivalente ad affermare che non è possibile che, nel caso due bocche qualsiasi risultino adattate, anche la terza risulti adattata. Se per assurdo fosse vera la (16.3), applicandola alle (16.2) avremo:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \ |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\
&(b)\ \ |S_{21}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\
&(c)\ \ |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\
&(d)\ \ S_{13}S_{23}^* = 0 \\
&(e)\ \ S_{12}S_{23}^* = 0 \\
&(f)\ \ S_{12}S_{13}^* = 0
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $|S_{13}| = 0$, questa condizione verifica l'equazione (d) ed (f), comunque dalle equazioni (a) e (c) si ottiene che $|S_{12}| = 1, |S_{23}| = 1$ che comunque non verificano le $(e), (b)$, quindi necessariamente deve essere $|S_{13}| \neq 0$.

Supponiamo ora invece che $|S_{23}| = 0$. Le $(d), (e)$ sono verificate, mentre dalle $(b), (c)$ si ricava che $|S_{12}| = 1$, $|S_{13}| = 1$ che non verificano le equazioni (a) ed (f), per cui anche $|S_{23}| \neq 0$. A questo punto dato che $|S_{13}| \neq 0$ e $|S_{23}| \neq 0$, l'equazione (d) non è vera per cui si è arrivati tramite una dimostrazione per assurdo a dimostrare che non esiste un componente per il quale valga la (16.3). Si può dimostrare addirittura che non possono esistere componenti aventi almeno due termini della diagonale principale della matrice $[S]$ contemporaneamente nulli. Supponiamo per esempio che:

$$S_{22} = S_{33} = 0$$

dalle equazioni (16.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
(a)\quad & |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\
(b)\quad & |S_{21}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\
(c)\quad & |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\
(d)\quad & S_{11}S_{12}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \\
(e)\quad & S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{23}^* = 0 \\
(f)\quad & S_{12}S_{13}^* = 0
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto prima poniamo $|S_{12}| = 0$, che verifica la (f). Per verificare la (e) e la (d) può essere $|S_{13}| = 0$, ma dalla (a) abbiamo che $|S_{11}| = 1$. In questo caso abbiamo un componente degenere in cui la bocca 1 è chiusa su un cortocircuito (tutta l'onda incidente viene riflessa) ed è quindi un caso privo di interesse. Un analogo discorso vale nel caso in cui si ponga $|S_{13}| = 0$, per cui per una struttura tre bocche non è possibile che si abbia $S_{22} = S_{33} = 0$ (non è possibile che si abbia nemmeno $S_{11} = S_{33} = 0$ oppure $S_{11} = S_{22} = 0$). Si può dimostrare invece molto facilmente che una struttura a tre bocche può avere solo un termine della diagonale principale nullo.

Un'altra importante proprietà consiste nell'impossibilità di avere un completo disaccoppiamento tra due bocche qualsiasi. Per esempio, se alimento la bocca 3, inviando potenza alle bocche 1,2, non riesco a mantenere queste ultime (1,2) disaccoppiate, in altre parole non riesco ad avere $S_{12} = 0$. Infatti, dalle (16.2) si ha:

$$\begin{aligned}
(a)\quad & |S_{11}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\
(b)\quad & |S_{21}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\
(c)\quad & |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\
(d)\quad & S_{13}S_{23}^* = 0 \\
(e)\quad & S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{23}^* = 0 \\
(f)\quad & S_{22}S_{23}^* + S_{23}S_{33}^* = 0
\end{aligned}$$

Per verificare la (d) deve essere nullo almeno uno dei due termini, supponiamo che $|S_{13}| = 0$. Questa condizione verifica la (e), inoltre dalla (a) si ottiene che $|S_{11}| = 1$. Dato che abbiamo dimostrato che non è possibile che in una struttura a tre bocche si abbia $|S_{22}| = |S_{33}| = 0$, affinché la (f) sia soddisfatta deve essere $|S_{23}| = 0$, che infatti impone, in base alle $(b),(c)$, che $|S_{22}| = |S_{33}| = 1$. La matrice $[S]$ che si ottiene è del tipo:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Che rappresenta una struttura chiusa in corto circuito su tutte le porte e che pertanto non ha bocche accessibili dall'esterno. È chiaro come un tale componente non abbia nessuna importanza pratica. Un ragionamento analogo può essere fatto nel caso in cui, per verificare la (d), si imponga $|S_{23}| = 0$. Nei casi pratici, in cui per esempio alla struttura tre bocche si colleghino un trasmettitore, un ricevitore ed un'antenna, non si può evitare che trasmettitore e ricevitore siano disaccoppiati (come è desiderabile che sia).

Vediamo ora alcuni componenti a tre bocche utilizzati nelle tecniche a microonde.

16.1 STRUTTURE A T SIMMETRICHE

Sono definite come quelle strutture che godono delle seguenti proprietà:

A) Sono prive di riflessioni alla bocca 1, quando le bocche 2, 3 sono adattate.
B) Le bocche 2 e 3 hanno lo stesso coefficiente di riflessione quando rispettivamente le bocche 1, 3 e 1,2 sono adattate.

Per la matrice $[S]$ queste condizioni equivalgono ad imporre che $S_{11} = 0$ e che $S_{22} = S_{33}$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Se la struttura è reciproca e priva di perdite in base alle (16.2) abbiamo:

$$\begin{aligned} &(a) \quad |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ &(b) \quad |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ &(c) \quad |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \\ &(d) \quad S_{12}S_{22}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \\ &(e) \quad S_{12}S_{23}^* + S_{13}S_{22}^* = 0 \\ &(f) \quad S_{12}S_{13}^* + S_{22}S_{23}^* + S_{23}S_{33}^* = 0 \end{aligned}$$

Sottraendo la (b) dalla (c) si ottiene:

$$|S_{12}|^2 = |S_{13}|^2$$

che inserita nella (a) permette di scrivere:

$$2\,|S_{12}|^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |S_{12}|^2 = |S_{13}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le (b) e le (c) divengono entrambe:

$$|S_{22}|^2 = |S_{23}|^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{16.4}$$

In base alla (d), dato che $|S_{12}| = |S_{13}|$, non può che essere $|S_{22}| = |S_{23}|$ per cui in base alla (16.4):

$$|S_{22}|^2 = |S_{23}|^2 = \frac{1}{2}$$

Quindi la conseguenza dell'imposizione delle condizioni A) e B) è la determinazione dei moduli a prescindere dalla struttura. Le $(d), (e), (f)$ possono essere scritte:

$$(d)\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta_{12}} \frac{1}{2} e^{-j\theta_{22}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta_{13}} \frac{1}{2} e^{-j\theta_{23}} = 0$$
$$(e)\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta_{12}} \frac{1}{2} e^{-j\theta_{23}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta_{13}} \frac{1}{2} e^{-j\theta_{22}} = 0$$
$$(f)\ \frac{1}{2} e^{j(\theta_{12}-\theta_{13})} + \frac{1}{4} e^{j(\theta_{22}-\theta_{23})} + \frac{1}{4} e^{j(\theta_{23}-\theta_{22})} = 0$$

Dopo alcuni passaggi si arriva:

$$(d)\ \frac{1}{2} e^{j(\theta_{12}-\theta_{22})} + \frac{1}{2} e^{j(\theta_{13}-\theta_{23})} = 0 \quad \Longrightarrow (\theta_{12} - \theta_{22}) = (\theta_{13} - \theta_{23}) \pm \pi$$
$$(e)\ \frac{1}{2} e^{j(\theta_{12}-\theta_{23})} + \frac{1}{2} e^{j(\theta_{13}-\theta_{22})} = 0 \quad \Longrightarrow (\theta_{12} - \theta_{23}) = (\theta_{13} - \theta_{22}) \pm \pi$$
$$(f)\ \frac{1}{2} e^{j(\theta_{12}-\theta_{13})} + \cos(\theta_{22} - \theta_{23}) = 0$$

Se nella (f) sviluppo l'esponenziale in termini di coseno e seno ottengo le due relazioni:

$$(f1)\ \cos(\theta_{12} - \theta_{23}) = -\cos(\theta_{22} - \theta_{23})$$
$$(f2)\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = 0$$

In base alla $(f2)$ posso determinare due classi di componenti a T simmetriche, che sono quelle per cui:

$$\begin{matrix} \theta_{12} = \theta_{13} + \pi & 1\ classe \\ \theta_{12} = \theta_{13} & 2\ classe \end{matrix} \tag{16.5}$$

Le due classi differiscono per il fatto che l'uscita tra le porte 2 e 3 sono rispettivamente in opposizione di fase ed in fase. In base alla (d) imponendo le (16.5) ottengo:

$$\begin{matrix} \theta_{22} = \theta_{23} & 1\ classe \\ \theta_{22} = \theta_{23} + \pi & 2\ classe \end{matrix}$$

La matrice $[S]$ diviene:

Per la 1 classe:

$$|S_{12}| = |S_{13}| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \theta_{12} = \theta_{13} + \pi \quad \Longrightarrow \quad S_{12} = -S_{13}$$
$$|S_{22}| = |S_{23}| = \frac{1}{2}; \qquad \theta_{22} = \theta_{23} \quad \Longrightarrow \quad S_{22} = S_{23}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & -S_{12} \\ -S_{12} & S_{22} & S_{22} \\ S_{12} & S_{22} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Per la 2 classe:

$$|S_{12}| = |S_{13}| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \theta_{12} = \theta_{13} \quad \Longrightarrow \quad S_{12} = S_{13}$$
$$|S_{22}| = |S_{23}| = \frac{1}{2}; \qquad \theta_{22} = \theta_{23} + \pi \Longrightarrow \quad S_{22} = -S_{23}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & -S_{22} \\ S_{12} & -S_{22} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Il parametro S_{21}, per come è definito, rappresenta il rapporto tra l'onda uscente dalla bocca 2 e l'onda entrante nella bocca 1 (ovviamente quando alimento dalla bocca 1), quando le bocche 2 e 3 sono adattate. Inoltre, dalla relazione $|S_{12}|^2 = |S_{13}|^2 = 1/2$ posso affermare che per entrambe le classi di componenti la potenza entrante dalla porta 1 si divide in maniera esattamente uguale tra le porte 2 e 3 (divisore di potenza). Se invece alimento dalla porta 2, dato che $|S_{21}|^2 = 1/2$ *e* $|S_{23}|^2 = 1/4$, metà della potenza esce dalla bocca 1, un quarto dalla bocca 3 ed il rimanente quarto viene riflessa alla bocca 2 (discorso analogo vale nel caso in cui alimento la bocca 3).

Vediamo ora come, attraverso delle considerazioni di carattere qualitativo sulle configurazioni di campo, sia possibile verificare le proprietà precedentemente trovate. Consideriamo una struttura a T simmetrica realizzata con guide d'onda a sezione rettangolare. Si chiama T sul piano E una struttura in cui la bocca 1 è formata da una derivazione che si trova sulla superficie di lato maggiore (figura 16.2).

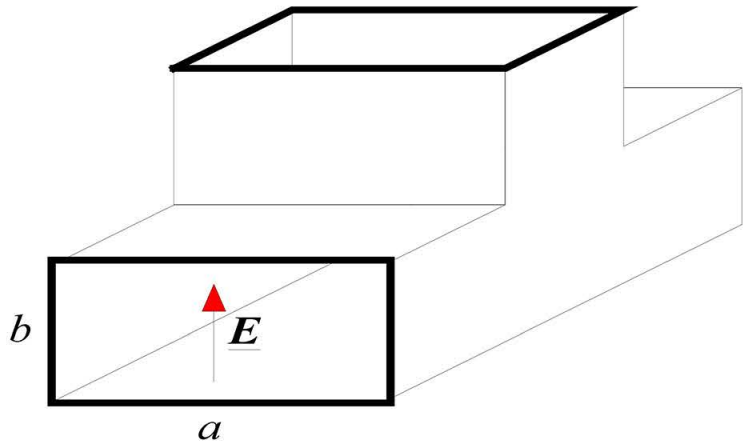


Figura 16.2 - T sul Piano E.

Per le bocche 2 e 3 esiste una simmetria geometrica rispetto alla bocca 1 che consente di ottenere una simmetria anche nei parametri di Scattering.

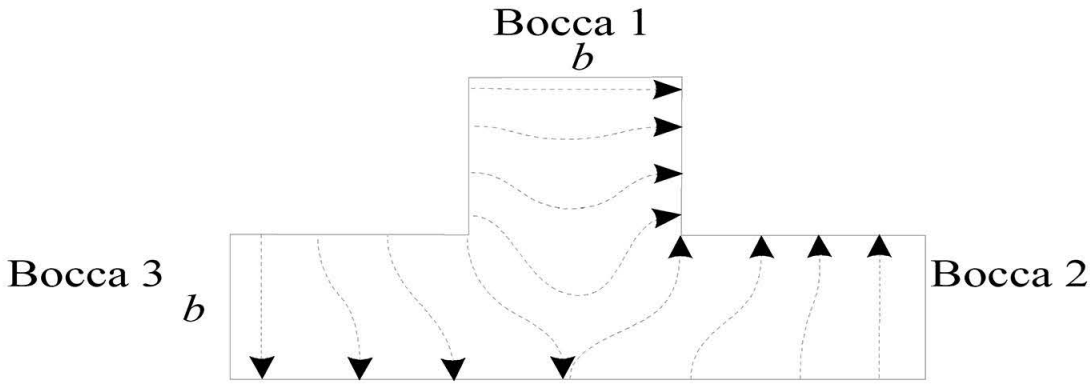


Figura 16.3 - Selezione laterale del T sul piano E.

Immaginiamo ora la situazione (illustrata in figura 16.3) in cui, alimentando dalla bocca con il modo fondamentale TE_{10}, il campo elettrico sia diretto verso destra.

Immaginiamo di seguire nel tempo questo vettore; questo si sposterà verso il basso fino alla discontinuità, dove per le condizioni al contorno, dovrà necessariamente separarsi in due componenti che si propagheranno verso le bocche 2 e 3 rispettivamente.

Si noti che mentre il campo che si dirige verso la bocca 2 è diretto verso l'alto, il campo alla bocca 3 è diretto verso il basso, quindi per questa struttura le bocche 2 e 3 saranno in opposizione di fase per cui il T simmetrico sul piano E appartiene alla 1 classe di componenti.

C'è da tenere in mente che le proprietà di queste strutture sono una conseguenza dell'avere imposto $S_{11}=0$, ma nella realtà esistono T simmetrici non adattati ($S_{11}\neq 0$) cioè il componente non si comporterà come un perfetto divisore di potenza, ma parte di questa verrà riflessa indietro dalla bocca 1.

In pratica non è proprio vero che se adatto le porte 2 e 3 la 1 risulti adattata, infatti molto spesso occorre introdurre delle opportune reattanze (discontinuità). Per esempio, per ottenere un *T* adattato solitamente, nella parete opposta alla bocca 1, viene introdotta una vite metallica di taratura che funge da capacità o da induttanza.

Per i *T* sul piano *E* è possibile considerare un circuito equivalente a bassa frequenza (a costanti concentrate) che si comporta, nei confronti delle onde di tensione, come la struttura a costanti distribuite.

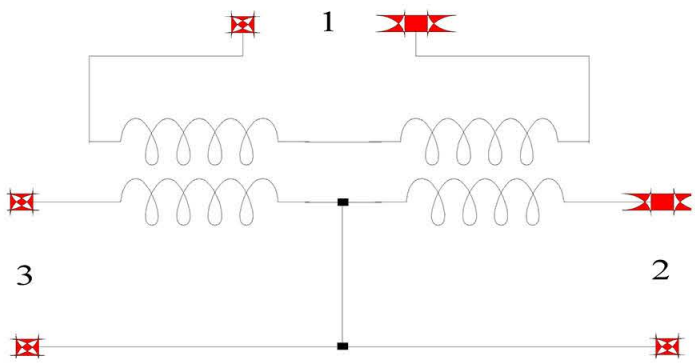


Figura 16.4- Rappresentazione a costatanti concentrate del T su piano E

Questo circuito realizza la derivazione mediante un trasformatore a presa centrale (cioè bilanciato) in cui le uscite 2 e 3 sono uguali in modulo ma in opposizione di fase. È importante osservare che questo circuito non tiene in alcun conto delle dimensioni della struttura a costanti distribuite, pertanto è adatto soltanto a caratterizzare il suo comportamento nei confronti della potenza entrante.

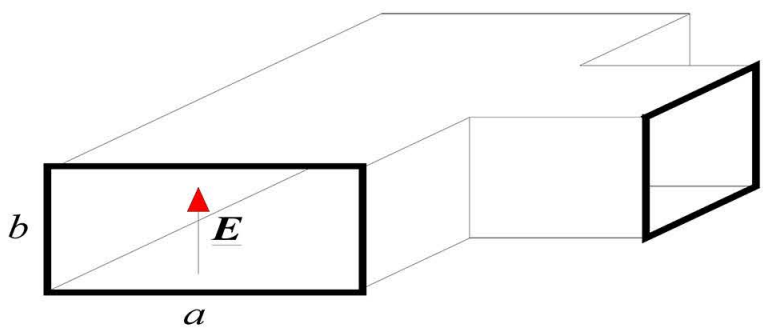


Figura 16.5 - T sul Piano H.

Se la derivazione della bocca 1 si trova sul lato minore della guida principale, la struttura viene chiamata T simmetrico nel piano H (vedi figura 16.5).

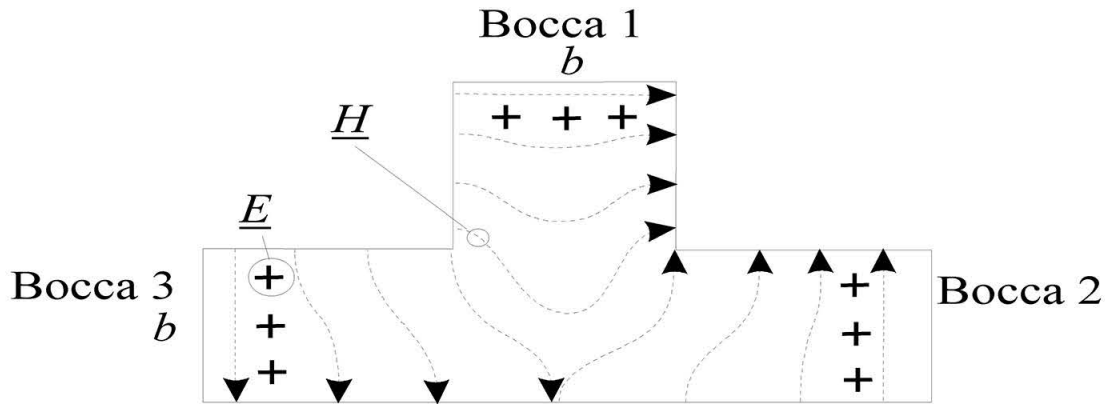


Figura 16.6 - Sezione orizzontale del T sul piano H.

Analizziamo la struttura del campo *e.m.* nel caso in cui si alimenti dalla bocca 1 (figura 16.6) e supponiamo che qui il campo elettrico sia uscente dal piano. Nella discontinuità il campo elettrico è in grado di conservare la sua direzione in quanto le condizioni al contorno lo consentono, pertanto alle bocche 2 e 3 i campi uscenti sono in fase, quindi la struttura appartiene alla seconda classe ($S_{12} = S_{13}$). La potenza entrante nella bocca 1 viene divisa tra le bocche 2 e 3 nel caso in cui la struttura è adattata, in caso contrario.

Anche in questo caso è possibile disegnare il seguente circuito equivalente a bassa frequenza.

Ovviamente le tensioni alle porte 2 e 3 sono in fase.

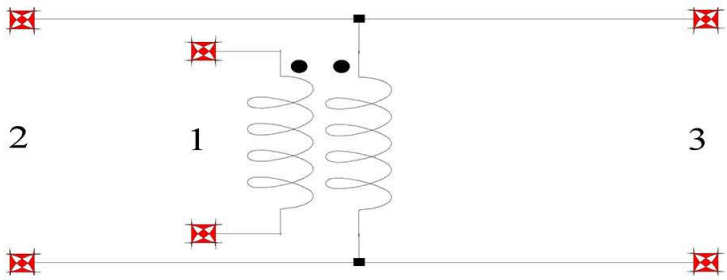


Figura 16.7- Rappresentazione a costatanti concentrate del T su piano H

Un'ultima classe di componenti a tre bocche che analizzeremo è quella dei *BALUN* (*BALanced - UNbalanced*), molto spesso usati nelle tecniche a microonde (specie nel Broadcasting).

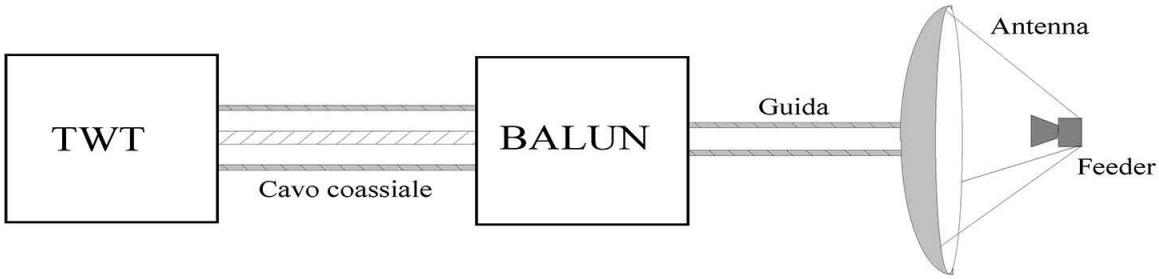


Figura 16.8- Connessione tra TWT e feeder di antenna.

In alcuni casi l'uscita dei tubi a microonde avviene direttamente in cavo coassiale, per evitare dispersioni o immissioni di forti campi. Le antenne ricetrasmittenti sono alimentate da un feeder d'antenna che molto spesso viene ricavato da una guida d'onda, quindi in questi casi si pone il problema di realizzare una connessione tra il cavo coassiale di uscita dell'amplificatore (che è un sistema sbilanciato) con una guida d'onda (che invece è un sistema bilanciato). Lo schema del circuito equivalente in bassa frequenza è il seguente:

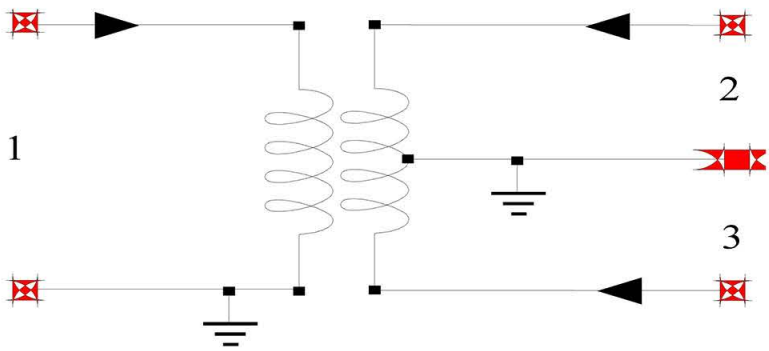


Figura 16.9- Rappresentazione a costatanti concentrate del BALUN.

È evidente come il circuito permetta di convertire un ingresso sbilanciato in due uscite bilanciate in controfase. Questo comporta che:

$$S_{12} = -S_{13}$$

tipica dei T simmetrici adattati della prima classe. La realizzazione dei *Balun* non richiede necessariamente che sia $S_{11} = 0$, possiamo dimostrarlo sulla base di alcune considerazioni sul circuito equivalente precedente, infatti:

$$V_2 = -V_3$$
$$I_2 = -I_3$$

(supponiamo che le due linee abbiano la stessa impedenza caratteristica e che siano chiuse su carichi adattati) In termini di onde incidenti e riflesse si può scrivere:

$$a_2 + b_2 = -a_3 - b_3$$
$$a_2 - b_2 = -a_3 + b_3$$

Sommando le due relazioni si ottiene che $a_2 = -a_3$ e quindi $b_2 = -b_3$. Ricordiamo che per un circuito reciproco le relazioni tra onde incidenti e riflesse alle varie bocche sono:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3$$
$$b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3$$

Imponendo che $a_2 = -a_3$ si ottiene

$$b_1 = S_{11}a_1 + (S_{12} - S_{13})a_2$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + (S_{22} - S_{23})a_2$$
$$b_3 = S_{31}a_1 + (S_{32} - S_{33})a_2$$

inoltre, deve essere $b_2 = -b_3$ per cui

$$S_{21}a_1 + (S_{22} - S_{23})a_2 = -S_{13}a_1 + (S_{33} - S_{23})a_2$$
$$(S_{12} + S_{13})a_1 = (S_{33} - S_{22})a_2$$

Affinché l'uguaglianza sia soddisfatta per qualsiasi coppia di onde a_1, a_2 è necessario che:

$$S_{12} = -S_{13}$$
$$S_{22} = -S_{33}$$

Quindi, come era già stato affermato, per un *Balun* non è necessario che $S_{11} = 0$. La matrice di Scattering è:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & -S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ -S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Dato che in precedenza è stato dimostrato che non è possibile che due elementi della diagonale principale siano nulli, consegue che $S_{22} \neq 0$ e quindi soltanto S_{11} può essere nullo.

Le proprietà dimostrate a partire dalle relazioni (16.2) contengono implicitamente l'ipotesi che la struttura è reciproca e priva di perdite (infatti $[S]$ è simmetrica). Nel caso che invece sia ancora priva di perdite, ma non reciproca, le relazioni da cui partire sono le (Ricordiamo che se la struttura è priva di perdite deve valere la $[S]([S]^T)^* = [1]$)

$$\begin{aligned}
&(a) \quad |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\
&(b) \quad |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\
&(c) \quad |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \\
&(d) \quad S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \\
&(e) \quad S_{11}S_{31}^* + S_{12}S_{32}^* + S_{13}S_{33}^* = 0 \\
&(f) \quad S_{12}S_{31}^* + S_{22}S_{32}^* + S_{23}S_{33}^* = 0
\end{aligned} \tag{16.6}$$

Vediamo che in questo caso (non reciprocità) è possibile progettare dei componenti con $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$.

$$\begin{aligned}
&(a) \quad |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\
&(b) \quad |S_{21}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\
&(c) \quad |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\
&(d) \quad S_{13}S_{23}^* = 0 \\
&(e) \quad S_{12}S_{32}^* = 0 \\
&(f) \quad S_{12}S_{31}^* = 0
\end{aligned}$$

Supponiamo che $S_{32} = 0$ e che $S_{12} \neq 0$ (la (e) è soddisfatta). Dalla (c) $|S_{31}| = 1$, per cui dalla (f) $S_{21} = 0$, segue che dalla (b) $|S_{23}| = 1$ e dalla (d) che $S_{13} = 0$. Quindi automaticamente restano determinati tutti i parametri:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\theta_{23}} \\ e^{j\theta_{31}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi in fase di progetto si hanno a disposizione le tre fasi. Dalla matrice di Scattering si ricava che:

$$\begin{aligned}
b_1 &= S_{12}a_1 \\
b_2 &= S_{23}a_3 \\
b_3 &= S_{31}a_1
\end{aligned}$$

Alimentando dalla bocca 1 una tale struttura, tutta la potenza esce dalla bocca 2, se ora alimento dalla 2, tutta la potenza esce dalla 3, mentre nel caso in cui la potenza entra dalla 3 esce tutta dalla 1. Un componente del genere è utile nella seguente situazione illustrata,

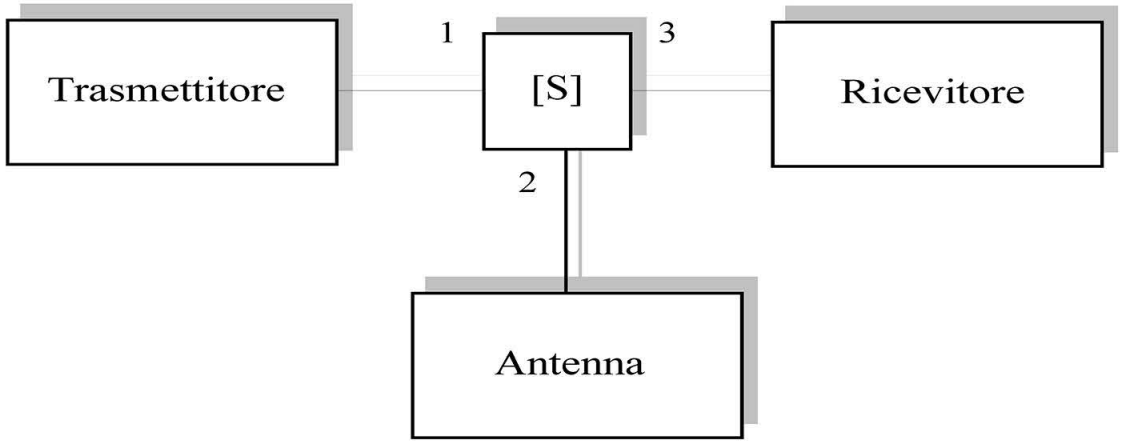


Figura 16.10 - Classica configurazione di un ricetrasmettitore.

in cui il trasmettitore deve inviare potenza verso l'antenna e non verso il ricevitore, mentre la potenza ricevuta dall'antenna deve essere inviata verso il ricevitore. Componenti di questo tipo vengono realizzati sfruttando le proprietà di alcuni materiali ferromagnetici che vedremo in seguito e vengono chiamati Circolatori a ferrite.

17 STRUTTURE A QUATTRO BOCCHE

La matrice di Scattering di un componente a quattro bocche ha 16 elementi complessi, è ovvio pertanto che al variare di tali parametri si ottengono un'infinità di strutture, ognuna con delle proprie caratteristiche.

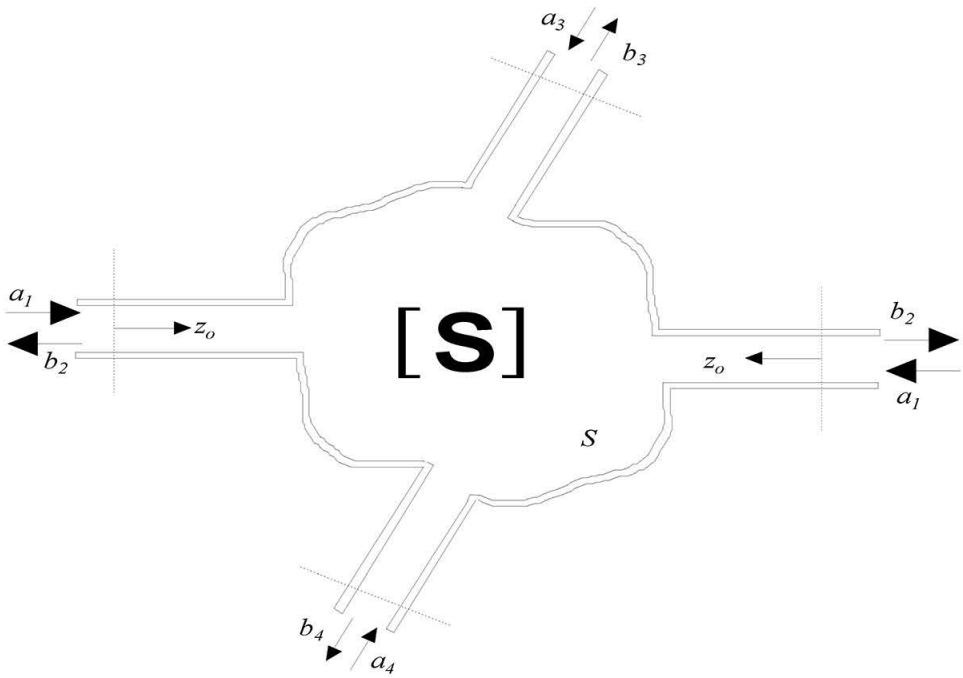


Figura 17.1 - Struttura a quattro bocche.

Una classe di componenti a quattro bocche che oggi trovano una larga utilizzazione nelle tecniche a microonde è quella costituita dagli accoppiatori direzionali. Questi servono per realizzare uno svariato numero di funzioni, tra le quali i ricevitori supereterodina, T magici, ponti di misura, ecc.. Gli accoppiatori direzionali possono essere classificati in due categorie:

- ***A.D.*** simmetrici
- ***A.D.*** non simmetrici (giunzioni ibride)

Nel caso generale gli ***A.D.*** sono strutture reciproche ($[S]$ è simmetrica) e prive di perdite $[S]([S]^T)^* = [1]$. Le quattro bocche possono essere divise in due gruppi (naturalmente la scelta delle bocche è del tutto arbitraria) così composti:

- 1 e 2 formano il primo gruppo
- 3 e 4 formano il secondo gruppo

in base ai quali definiamo le seguenti proprietà:

A) Due bocche dello stesso gruppo risultano tra loro disaccoppiate, il che vuol dire che:

$$S_{12} = S_{21} = 0$$
$$S_{34} = S_{43} = 0$$

(la struttura è per ipotesi reciproca)

B) Se due bocche dello stesso gruppo vengono adattate, le bocche dell'altro gruppo risultano automaticamente adattate. Ciò vuol dire che se per esempio $S_{11} = S_{22} = 0$ si ha che anche $S_{33} = S_{44} = 0$.

Pertanto, la matrice $[S]$, che in base alla sola reciprocità è del tipo:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{17.1}$$

dalla definizione A) e ipotizzando che $S_{11} = S_{22} = 0$ si ottiene:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \tag{17.2}$$

Dato che inoltre la struttura viene supposta priva di perdite:

$$[S]([S]^T)^* = [1]$$

$$(a) \quad |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1$$
$$(b) \quad |S_{23}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$
$$(c) \quad |S_{31}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1$$
$$(d) \quad |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{44}|^2 = 1$$

Sommiamo ora la (a) con la (b) e la (c) con la (d):

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 2$$
$$|S_{31}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{44}|^2 = 2$$

Dal confronto di queste due equazioni risulta che:

$$|S_{33}| = 0$$
$$|S_{44}| = 0$$

Abbiamo così dimostrato che non è necessario ipotizzare la proprietà B) in quanto essa è direttamente deducibile dalla proprietà A) e dall'ipotesi di avere 2 bocche dello stesso gruppo adattate. Quindi:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(a) \quad |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ &(b) \quad |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ &(c) \quad |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ &(d) \quad |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ &(e) \quad S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0 \\ &(e) \quad S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = 0 \end{aligned}$$

Dalle equazioni (a), (c) si ricava immediatamente che:

$$|S_{14}| = |S_{23}|$$

Dato che l'uguaglianza tra i moduli implica l'uguaglianza del trasferimento di potenza, si ha che la precedente relazione mostra come la potenza inviata dalla bocca 1 verso la 4 si uguale alla potenza trasferita dalla bocca 2 alla 3. Analoghe considerazioni valgono per la relazione:

$$|S_{13}| = |S_{24}|$$

ottenuta dalla (a) e dalla (d).

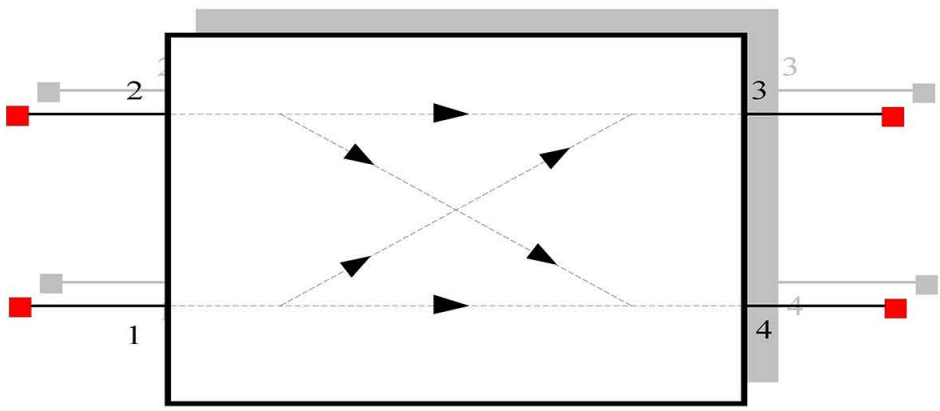


Figura 17.2 - Struttura reciproca.

In base alle proprietà dei parametri di Scattering possiamo disegnare l'accoppiatore direzionale come in figura 17.2, dove le frecce indicano il verso delle onde (le frecce vanno considerate in entrambi i sensi in quanto il componente è reciproco). Dalla figura è evidente come le bocche dello stesso gruppo rimangono disaccoppiate, cioè tra esse non sono possibili trasferimenti di potenza. Riepilogando abbiamo ottenuto tre relazioni indipendenti tra i moduli:

$$|S_{14}| = |S_{23}|$$
$$|S_{13}| = |S_{24}|$$
$$|S_{13}|^2 + |S_{24}|^2 = 1$$

(la terza equazione è una conseguenza del fatto che la potenza che esce dalle bocche 3 e 4 è pari alla potenza entrante dalla bocca 1, nel caso che questa si l'unica bocca di alimentazione). Si deduce che in un ***A.D.*** soltanto un modulo è indipendente, e viene indicato con:

$$|S_{14}| = \alpha$$

Pertanto:

$$|S_{13}| = |S_{24}| = \alpha$$
$$|S_{14}| = |S_{23}| = \sqrt{1-\alpha^2}$$

Per quanto riguarda le fasi le (e), (f) possono essere riscritte come:

$$(e)\ |S_{13}||S_{23}|e^{j(\theta_{13}-\theta_{23})} + |S_{14}||S_{24}|e^{j(\theta_{14}-\theta_{24})} = 0$$
$$(f)\ |S_{13}||S_{14}|e^{j(\theta_{13}-\theta_{14})} + |S_{23}||S_{24}|e^{j(\theta_{23}-\theta_{24})} = 0$$

che in base alle relazioni dei moduli diventano:

$$(e)\ e^{j(\theta_{13}-\theta_{23})} + e^{j(\theta_{14}-\theta_{24})} = 0$$
$$(f)\ e^{j(\theta_{13}-\theta_{14})} + e^{j(\theta_{23}-\theta_{24})} = 0$$

Queste sono verificate per:

$$(e)\ \theta_{13} - \theta_{23} = \theta_{14} - \theta_{24} + \pi$$
$$(f)\ \theta_{13} - \theta_{14} = \theta_{23} - \theta_{24} + \pi \qquad (17.3)$$

che sono identiche, per cui in definitiva ho a disposizione tre fasi e un modulo, infatti la quarta fase è fissata dall'equazione precedente. Le fasi possono essere scelte, per esempio, variando la lunghezza delle linee di uscita dell'***A.D.***.

Quindi la matrice di Scattering sarà:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha e^{j\theta_{13}} & \sqrt{1-\alpha^2}e^{j\theta_{14}} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\alpha^2}e^{j\theta_{23}} & \alpha e^{j\theta_{24}} \\ \alpha e^{j\theta_{13}} & \sqrt{1-\alpha^2}e^{j\theta_{23}} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\alpha^2}e^{j\theta_{14}} & \alpha e^{j\theta_{24}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La relazione (17.3) può essere interpretata nel seguente modo. La differenza di fase tra le bocche 3 e 4 quando alimento dalla 1 e sfasata di π rispetto alla differenza di fase tra le stesse bocche quando alimento dalla 2.

17.1 ACCOPPIATORI DIREZIONALI SIMMETRICI.

Si ottengono ponendo:

$$S_{13} = S_{24}$$
$$S_{14} = S_{23}$$

Dato che tali uguaglianze sono già soddisfatte dai moduli, non resta che imporre l'uguaglianza delle fasi.

$$\theta_{13} = \theta_{24}$$
$$\theta_{14} = \theta_{23}$$

Dato che dalle (17.3) si ha che $\theta_{13} - \theta_{14} = \theta_{23} - \theta_{24} + \pi$ otteniamo:

$$2\theta_{13} = 2\theta_{14} + \pi \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{14} = \theta_{13} - \frac{\pi}{2}$$

pertanto, rimane a disposizione una sola fase, per esempio la θ_{13}, e si possono scrivere le altre in funzione di questa:

$$\theta_{24} = \theta_{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{14} = \theta_{23} = \theta_{13} - \frac{\pi}{2}$$

l'ultima uguaglianza mostra come, alimentando dalla bocca 1, le uscite 3 e 4 sono in quadratura (analogamente se alimento dalla 2), pertanto in questo caso le due bocche dello stesso gruppo sono indistinguibili. Ricordando che $e^{-j\pi/2} = -j$ la matrice di Scattering si semplifica nella:

$$[S] = e^{j\theta_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & -j\sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 & 0 & -j\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha \\ \alpha & -j\sqrt{1-\alpha^2} & 0 & 0 \\ -j\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Data l'arbitrarietà della fase posso Scegliere θ_{13}=0 per cui il termine esponenziale diviene 1.

17.2 ACCOPPIATORI DIREZIONALI NON SIMMETRICI (GIUNZIONI IBRIDE).

Si ottengono ponendo:

$$S_{13} = S_{24}$$
$$S_{14} = -S_{23}$$

Dato che tali uguaglianze sono già soddisfatte dai moduli, anche in questo caso non resta che imporre l'uguaglianza delle fasi.

$$\theta_{13} = \theta_{24}$$
$$\theta_{14} = \theta_{23} + \pi$$

Ricordando che $\theta_{13} - \theta_{14} = \theta_{23} - \theta_{24} + \pi$ otteniamo:

$$2\theta_{13} = 2\theta_{14} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{14} = \theta_{13}$$

anche qui pertanto rimane a disposizione una sola fase, per esempio la θ_{13}, e si possono scrivere le altre in funzione di questa:

$$\theta_{13} = \theta_{24}$$
$$\theta_{14} = \theta_{13}$$
$$\theta_{23} = \theta_{13} - \pi$$

Si noti che se alimento dalla bacca 1, le 3 e 4 sono in fase mentre se alimento dalla 2 le 3 e 4 sono in opposizione di fase, pertanto in questo caso le bocche dello stesso gruppo sono distinguibili l'una dall'altra. La matrice $[S]$ che ne consegue è:

$$[S] = e^{j\theta_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha \\ \alpha & -\sqrt{1-\alpha^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una classe di ***A.D.*** appartenenti alle giunzioni ibride è costituita dai T magici (o T ibridi). Abbiamo visto precedentemente che $\alpha = |S_{13}|$ è proporzionale al trasferimento di potenza dalla bocca 1 alla bocca 3, mentre $\sqrt{1-\alpha^2}$ è proporzionale al trasferimento di potenza dalla bocca 1 alla 4. Possiamo pensare di dimensionare α in modo tale da dividere la potenza, che entra dalla bocca 1, in parti uguali attraverso le porte 3 e 4. Questo si ottiene per $\alpha = 1/\sqrt{2}$. La matrice $[S]$ dello T magico sarà:

$$[S] = \frac{e^{j\theta_{13}}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un modo per realizzare questo tipo di componenti è quello di unire un T nel piano E ed un T nel piano H come in figura 17.3.

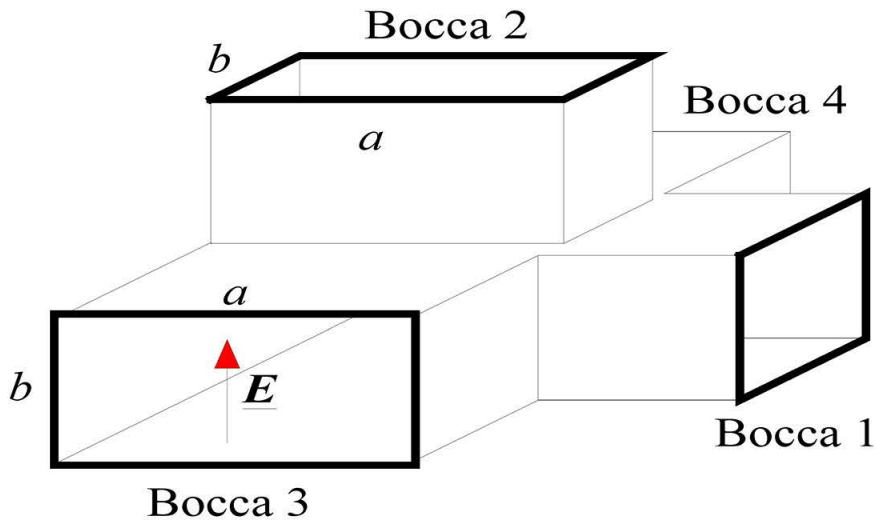


Figura 17.3 - T magico.

Si ricordi infatti che nel T nel piano H l'accoppiamento della bocca 1 con la 3 è uguale all'accoppiamento della bocca 1 con la 4 (sia in modulo che in fase), mentre nel T sul piano E l'accoppiamento tra la bocca 2 e 3 è in opposizione di fase rispetto a quello delle bocche 2 e 4. In base alla configurazione del campo elettrico del modo TE_{10} entrante dalla bocca 1 è possibile notare come la bocca 2 risulti disaccoppiata in quanto il campo stesso è parallelo all'asse del tratto di guida. Analogamente a quanto fatto per gli T sul piano E e sul piano H è possibile ottenere per lo T magico un circuito equivalente a bassa frequenza

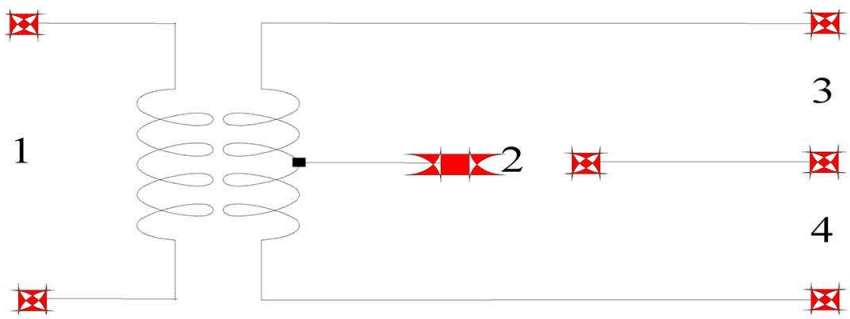


Figura 17.4 - Rappresentazione a costatanti concentrate del T magico.

Da questo circuito è evidente che $S_{12} = S_{34} = 0$. È importante ricordare che le proprietà fino ad ora viste sono valide nell'ipotesi di bocche perfettamente adattate infatti solo in questo caso si può scrivere che $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$.

Vediamo ora come un accoppiatore direzionale possa essere caratterizzato mediante la definizione di alcuni nuovi parametri che permettano una sua individuazione in maniera rapida e semplice.

17.3 ACCOPPIAMENTO ℂ

Fino ad ora ci siamo limitati a studiare gli accoppiatori direzionali da un punto di vista esterno, senza indagare su come venga effettivamente realizzato un tale componente. La struttura dipende ovviamente dal tipo di tecnologia che si intende usare (guide d'onda, cavo coassiale, microstriscia, ecc..), comunque in linee piuttosto generali è possibile affermare che gli ***A.D.*** vengono realizzati creando un opportuno accoppiamento elettromagnetico tra due linee, che permette un trasferimento di potenza in entrambi i lati. Per definire quantitativamente il grado di "*accoppiamento*" tra le linee, si definisce un parametro ℂ mediante un'esperienza in cui viene misurata la relazione tra la potenza entrante alla bocca 1 e quella uscente alla bocca 3 quando le bocche 2 e 4 risultano adattate. Lo schema circuitale è il seguente:

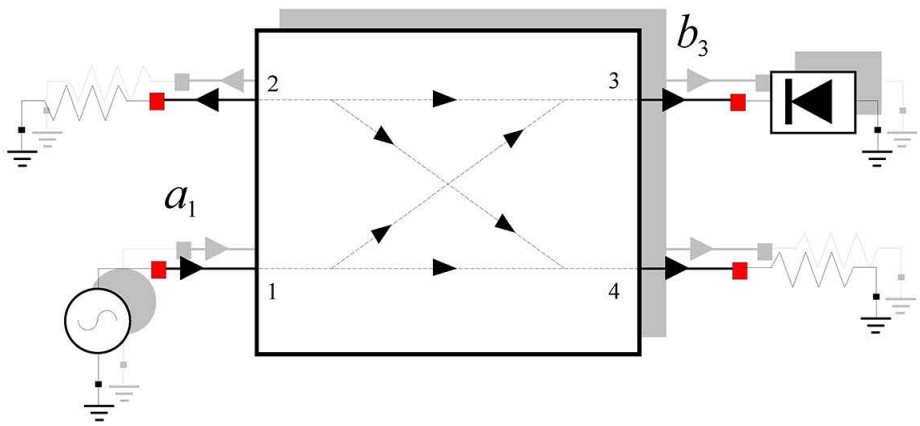


Figura 17.5 - Schema di un accoppiatore adattato.

L'accoppiamento è così definito:

$$\mathbb{C}|_{dB} = 10\log\frac{P_{in}}{P_{31}} \tag{17.4}$$

Dove, con la normalizzazione $\eta = 1$:

$$P_{in} = \frac{1}{2}a_1 a_1^* = \frac{1}{2}|a_1|^2$$
$$P_{31} = \frac{1}{2}b_3 b_3^* = \frac{1}{2}|b_3|^2$$

ma dato che: $b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3 + S_{34}a_4$

in cui $a_2 = a_4 = 0$, $S_{13} = S_{31}$ (per la simmetria), $S_{33} = 0$, quindi

$$b_3 = S_{31}a_1 \quad \Longrightarrow \quad P_{31} = \frac{1}{2}|S_{13}|^2\,|a_1|^2$$

$$\mathbb{C}|_{dB} = 10\log\frac{1}{|S_{13}|^2} = 20\log\frac{1}{\alpha} \tag{17.5}$$

Un accoppiatore direzionale con un accoppiamento $\mathbb{C} = 10\,dB$ invia 1/10 della potenza alla bocca 3, mentre gli altri 9/10 escono dalla 4. Se $\mathbb{C} = 3\,dB$ dalle bocche 3 e 4 esce metà della potenza di ingresso.

17.4 Direttività $\mathbb{D}$

Nella maggior parte dei casi pratici, gli ***A.D.*** reali si discostano dal comportamento ideale fino ad ora trattato, infatti non si riesce a realizzare un perfetto disaccoppiamento tra le porte dello stesso gruppo, per cui avremo $S_{12} \cong 0, S_{34} \cong 0$. Per definire quantitativamente di quanto un accoppiatore reali si discosta da quello ideale, si definisce il parametro direttività $\mathbb{D}$. La direttività può venire misurata mediante le due seguenti configurazioni circuitali:

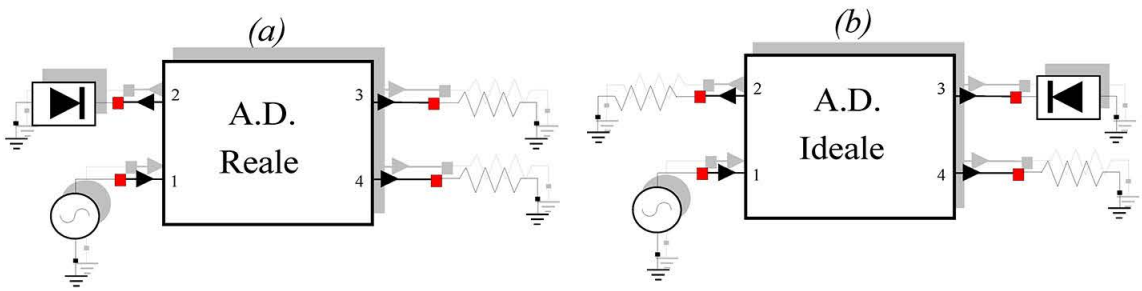


Figura 17.6 - Schema di per la misura della Direttività.

$$\mathbb{D}|_{dB} = 10\log\frac{Potenza\ uscente\ dalla\ bocca\ 2\ nel\ caso\ (a)}{Potenza\ uscente\ dalla\ bocca\ 3\ nel\ caso\ (b)} = 10\log\frac{P_{31}}{P_{21}} \tag{17.6}$$

Dato che

$$b_3 = S_{13}a_1 \quad \Longrightarrow \quad P_{31} = \frac{1}{2}\,|b_3|^2 = \frac{1}{2}\,|S_{13}|^2|a_1|^2$$

inoltre

$$b_2 = S_{12}a_1 \quad \Longrightarrow \quad P_{21} = \frac{1}{2}\,|b_2|^2 = \frac{1}{2}\,|S_{12}|^2|a_1|^2$$

per cui:

$$\mathbb{D}|_{dB} = 10\log\frac{|S_{13}|}{|P_{12}|} \tag{17.7}$$

La direttività è molto spesso legata alla tecnologia che viene usata, per esempio negli accoppiatori a microstriscia non si riescono a superare i $20 \div 25\ dB$, mentre in quelli a guida d'onda si ottengono range di $40 \div 50\ dB$.

17.5 Isolamento $\mathbb{I}$

Un altro parametro, legato alla direttività, è rappresentato dall'isolamento che viene definito (con riferimento alla situazione (a)) come:

$$\mathbb{I}|_{dB} = 10 \log \frac{P_{in}}{P_{21}} \tag{17.8}$$

L'isolamento mi fornisce una relazione tra la potenza entrante in 1 e quella uscente in 2, quindi anch'esso, come la Direttività, esprime la bontà di un ***A.D.***

$$\mathbb{I}|_{dB} = 10 \log \frac{P_{in}}{P_{21}} \frac{P_{31}}{P_{31}} = \mathbb{C}|_{dB} + \mathbb{D}|_{dB} \tag{17.9}$$

Un uso importante degli ***A.D.*** nei sistemi di trasmissione è quello di consentire di prelevare una minima potenza dalla linea principale in modo da effettuare una misura senza disturbare il funzionamento del circuito. In tal caso l'accoppiamento è dell'ordine dei $30\ dB$, con una direttività $\mathbb{D} = 30\ dB$ è quindi un isolamento di circa $60\ dB$. Nel caso che l'***A.D.*** venga utilizzato come un divisore di potenza, supponendo che $\mathbb{C} = 30\ dB$ e che $\mathbb{D} = 30\ dB$ si ottiene un isolamento $\mathbb{D} = 33\ dB$. Si nota subito che i due diversi ***A.D.***, pur avendo la stessa capacità di disaccoppiare le due bocche dello stesso gruppo, presentano un diverso valore di isolamento, per cui la direttività $\mathbb{D}$ è il parametro più adatto a descrivere la bontà del dispositivo.

Un ultimo parametro che caratterizza il comportamento reale degli ***A.D.*** è il coefficiente di riflessione alla bocca di ingresso (S_{11}), che può essere misurato alimentando dalla bocca 1 con le altre porte adattate. Anche il coefficiente di riflessione S_{11} caratterizza la bontà del dispositivo.

Riferiamoci ora, per semplicità, alla classe degli ***A.D.*** simmetrici reali, per osservare un dato che riguarda la presenza di riflessione all'ingresso e di un accoppiamento tra le bocche 1 e 3 che dovrebbero essere invece disaccoppiate. Per un ***A.D.*** simmetrico abbiamo:

$$S_{12} = S_{34}, \qquad S_{14} = S_{23}, \qquad S_{13} = S_{24}, \qquad S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44}$$

La matrice di Scattering sarà:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \tag{17.10}$$

che ha in ogni riga gli stessi quattro parametri. Questo succede in quanto negli ***A.D.*** simmetrici le bocche sono indistinguibili. Se il componente è privo di perdite la matrice $[S]$ deve essere anche unitaria per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} &(a) \quad |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ &(b) \quad S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{11}^* + S_{13}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \\ &(c) \quad S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{14}^* + S_{13}S_{11}^* + S_{14}S_{12}^* = 0 \\ &(d) \quad S_{11}S_{14}^* + S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{12}^* + S_{14}S_{11}^* = 0 \end{aligned}$$

Si noti che le $(a), (b), (c)$ sono tre espressioni reali infatti ogni riga è del tipo $X + X^* = 0$, per cui possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} &(b) \quad (S_{11}S_{12}^* + S_{13}S_{14}^*) + (S_{11}S_{12}^* + S_{13}S_{14}^*) = 0 \\ &(c) \quad (S_{11}S_{13}^* + S_{13}S_{14}^*) + (S_{11}S_{13}^* + S_{13}S_{14}^*) = 0 \\ &(d) \quad (S_{11}S_{14}^* + S_{13}S_{13}^*) + (S_{11}S_{14}^* + S_{13}S_{13}^*) = 0 \end{aligned}$$

Si può notare che se abbiamo 2 relazioni del tipo:

$$X + X^* = 0, \qquad Y + Y^* = 0$$

moltiplicando la prima per Y e la seconda per X otteniamo:

$$YX + YX^* = 0, \qquad XY + XY^* = 0$$

sottraendole membro a membro si ricava che:

$$YX^* = XY^*$$

Dalla (c) e dalla (d) si ha quindi:

$$(S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{14}^*)(S_{13}S_{12}^* + S_{14}S_{11}^*) = (S_{13}S_{11}^* + S_{14}S_{12}^*)(S_{12}S_{13}^* + S_{11}S_{14}^*)$$

$$\begin{aligned} |S_{13}|^2 S_{11}S_{12}^* + |S_{11}|^2 S_{14}S_{13}^* + |S_{12}|^2 S_{13}S_{14}^* + |S_{14}|^2 S_{11}S_{12}^* \\ = |S_{11}|^2 S_{13}S_{14}^* + |S_{13}|^2 S_{12}S_{11}^* + |S_{14}|^2 S_{11}S_{12}^* + |S_{12}|^2 S_{14}S_{13}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 (S_{14}S_{13}^* - S_{13}S_{14}^*) + |S_{12}|^2 (S_{13}S_{14}^* - S_{14}S_{13}^*) \\ = |S_{13}|^2 (S_{12}S_{11}^* - S_{11}S_{12}^*) + |S_{14}|^2 (S_{11}S_{12}^* - S_{12}S_{11}^*) \end{aligned}$$

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)(S_{14}S_{13}^* - S_{13}S_{14}^*) = (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)(S_{12}S_{11}^* - S_{11}S_{12}^*)$$

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)\left(|S_{14}||S_{13}|e^{j(\theta_{14}-\theta_{13})} - |S_{13}||S_{14}|e^{j(\theta_{13}-\theta_{14})}\right)$$
$$= (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)\left(|S_{12}||S_{11}|e^{j(\theta_{12}-\theta_{11})} - |S_{11}||S_{12}|e^{j(\theta_{11}-\theta_{12})}\right)$$

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)|S_{14}||S_{13}|\sin(\theta_{14} - \theta_{13}) = (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)|S_{12}||S_{11}|\sin(\theta_{12} - \theta_{11}) \qquad (17.11)$$

Dall'ultima relazione scritta possiamo trarre alcune importanti considerazioni. Si supponga che $S_{11} = 0$, per cui dalla (17.11) anche $S_{12} = 0$, analogamente nel caso in cui $S_{12} = 0$ implica dalla (17.11) che $S_{11} = 0$. ciò è di notevole importanza in quanto dimostra che se riesco a adattare bene la porta 1 ottengo conseguentemente un elevato valore della Direttività che dipende da S_{12}, (e viceversa).

Spesso nella tecnica a microonde si utilizzano gli ***A.D.*** a tre bocche in cui la quarta viene costruttivamente adattata all'interno della struttura stessa. L'adattamento è realizzato mediante un dissipatore a microonde, il quale trasforma l'energia del campo *e.m* incidente in energia termica. Nel caso dei componenti a tre bocche avevamo visto che era impossibile avere una direzionalità se non veniva fatta l'ipotesi che il componente avesse delle perdite, e questo è proprio ciò che abbiamo fatto nell'***A.D.***. Se per esempio abbiamo un ***A.D.*** reciproco e privo di perdite abbiamo che:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17.12)$$

Se adattiamo la bocca 2 ottengo un componente a tre bocche la cui matrice di Scattering si ottiene da quella dell'***A.D.*** imponendo che $a_2 = b_2 = 0$, quindi:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\, e^{j\theta_{13}} & \sqrt{1-\alpha^2}\, e^{j\theta_{14}} \\ \alpha\, e^{j\theta_{13}} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\alpha^2}\, e^{j\theta_{14}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17.13)$$

(sono state eliminate la seconda riga e la seconda colonna). Si vede immediatamente che le bocche 3 e 4 non sono accoppiate come nei normali ***A.D.***. Dato che il componente non è privo di perdite la $[S]$ non è unitaria, infatti affinché la matrice risulti unitaria dovrebbe essere $\alpha^2 = 1$ ($|S_{13}|^2 = 1$) il che comporterebbe che alimentando dalla bocca 1, tutta la potenza uscirebbe dalla 3, per cui la bocca 4 perderebbe di significato e la struttura si ridurrebbe alla linea 1-3.

Calcoliamo la direttività per una struttura a tre bocche ottenuta da un ***A.D.***. Ricordiamo che la direttività $\mathbb{D}$ si calcola attraverso la misura della potenza uscente dalle bocche nelle due situazioni circuitali illustrate precedentemente. Si noti comunque che l'inaccessibilità della bocca 2 rende impossibile realizzare il circuito (a), per cui la Direttività viene definita attraverso le altre due esperienze:

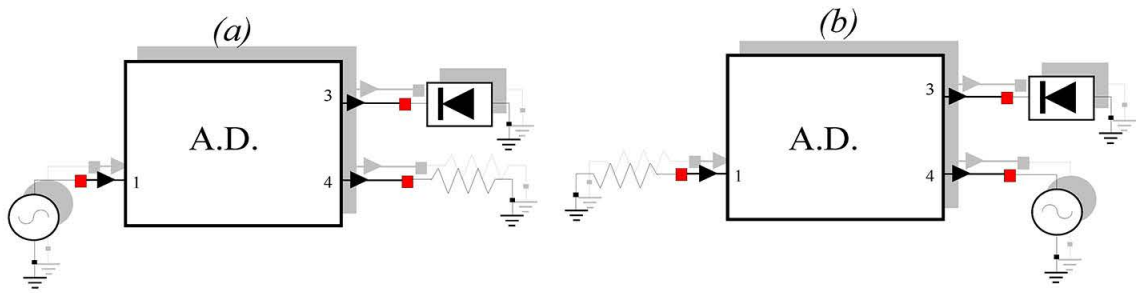


Figura 17.7 - Schema di per la misura della Direttività.

$$\mathbb{D}|_{dB} = 10\log\frac{Potenza\ uscente\ bocca\ 3\ nel\ caso\ (a)}{Potenza\ uscente\ bocca\ 3\ nel\ caso\ (b)} = 10\log\frac{P_{31}}{P_{34}} \qquad (17.14)$$

I componenti rappresentati dai diodi sono dei rivelatori adattati (detector) che trasformano il segnale a microonde in un segnale in continua mediante il quale è possibile risalire al livello di potenza dell'onda incidente. Si noti che le due esperienze, rispetto a quanto visto in precedenza, rovesciano la posizione del generatore e del carico, lasciando nella stessa posizione il rivelatore, per cui la direttività calcolata, se l'***A.D.*** è simmetrico, coincide con quella precedente (in caso di struttura non simmetrica ciò non è più vero infatti in generale $|S_{12}| \neq |S_{34}|$).

18 ACCOPPIATORI DIREZIONALI NELLE TECNICHE DI MISURA

Un'importante applicazione degli ***A.D.*** e quella che permette di misurare separatamente la potenza incidente e riflessa che viaggiano lungo una linea di trasmissione (figura 18.1).

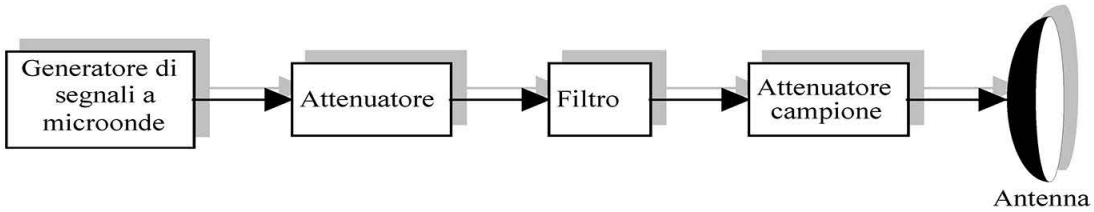


Figura 18.1 - Esempio di un sistema di trasmissione microonde

La caratteristica dei sistemi distribuiti a microonde è che se il carico (antenna) non è perfettamente adattato, una certa potenza riflessa viaggia lungo la linea verso il generatore. Quindi l'interesse di poter misurare separatamente le due onde è legato alla possibilità di verificare se il carico è adattato. In generale non è possibile, tramite misure di tensione o di corrente, rilevare le onde incidenti e riflesse in un punto della linea, in quanto queste risulteranno indistinguibili, per cui da questo punto di vista gli ***A.D.*** sono dei dispositivi innovativi. Una classica configurazione di misura delle potenze transitanti in una linea è quella di figura 18.2.

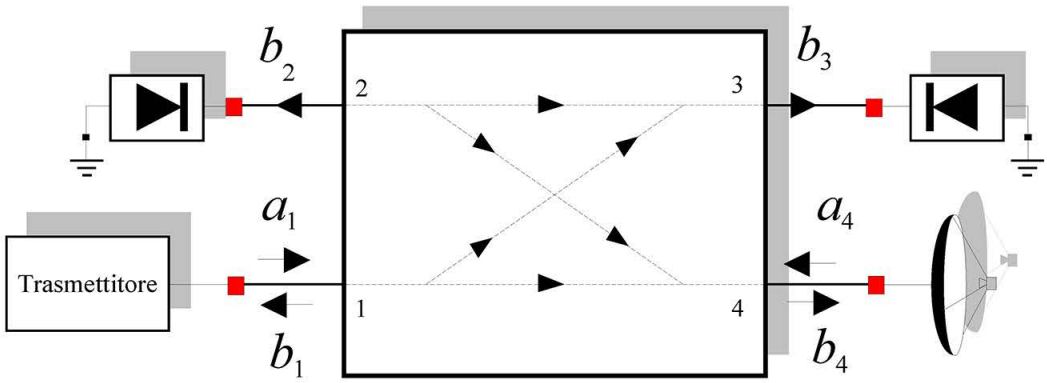


Figura 18.2 - Schema di misura delle onde incidente e riflessa.

La potenza che arriva alle bocche 2 e 3 viene misurata attraverso i parametri di Scattering

$$\begin{aligned} b_2 &= S_{12}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3 + S_{24}a_4 \\ b_3 &= S_{13}a_1 + S_{23}a_2 + S_{33}a_3 + S_{34}a_4 \end{aligned} \tag{18.1}$$

dato che in un ***A.D.*** $S_{12} = S_{34} = 0$, e se i detector sono adattati:

$$b_2 = S_{24}a_4$$
$$b_3 = S_{13}a_1$$

La potenza uscente dalla bocca 2 dipende soltanto da ciò che entra dalla bocca 4 e non dalla 3 (in quanto il detector della bocca 3 è adattato), analogamente la potenza uscente dalla 3 è proporzionale alla potenza entrante nella bocca 1.

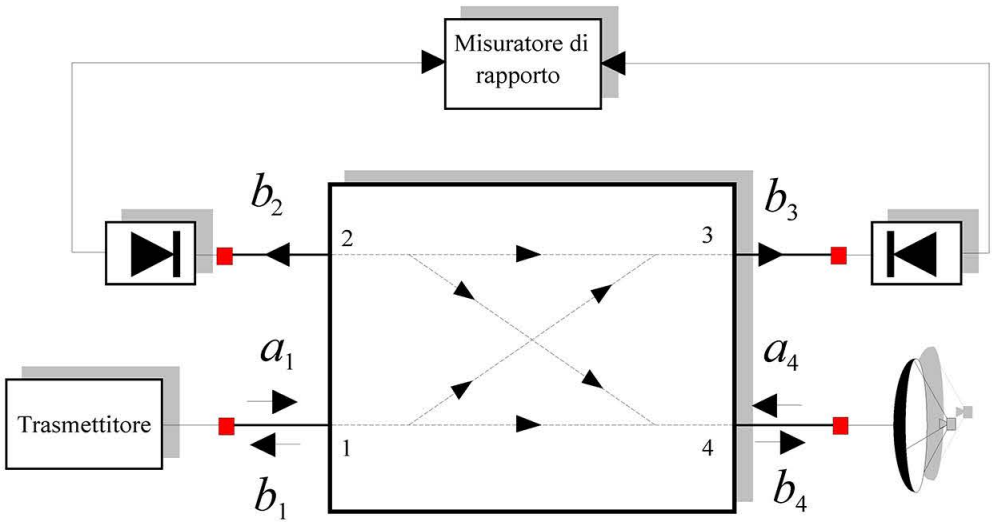


Figura 18.3 - Schema di misura del rapporto tra onde incidente e riflessa.

La configurazione circuitale di figura 18.3 consente una misura del rapporto $|b_2|/|b_3|$ senza l'interruzione della linea principale, ed inoltre se l'accoppiamento è dell'ordine dei $20 \div 30\ dB$ il flusso di potenza transitante tra le bocche 1-4 non viene perturbato. Pertanto:

$$\frac{|b_2|}{|b_3|} = \frac{|S_{24}||a_4|}{|S_{13}||a_1|}$$

ma se l'accoppiatore direzionale è simmetrico abbiamo $|S_{13}| = |S_{24}|$ per cui:

$$\frac{|b_2|}{|b_3|} = \frac{|a_4|}{|a_1|} = \frac{|\Gamma_L||b_4|}{|a_1|}$$

la misura pertanto permette di effettuare un controllo sul coefficiente di riflessione dell'antenna, che potrebbe variare per esempio, in caso di interruzioni della linea. I detector reali hanno dei coefficienti di riflessione diversi da zero (circa 0,12), per cui generano un'onda riflessa che falsa la misura. In questi casi viene utilizzato lo schema di figura 18.4 che permette di misurare la potenza trasmessa senza che il detector introduca forti riflessioni.

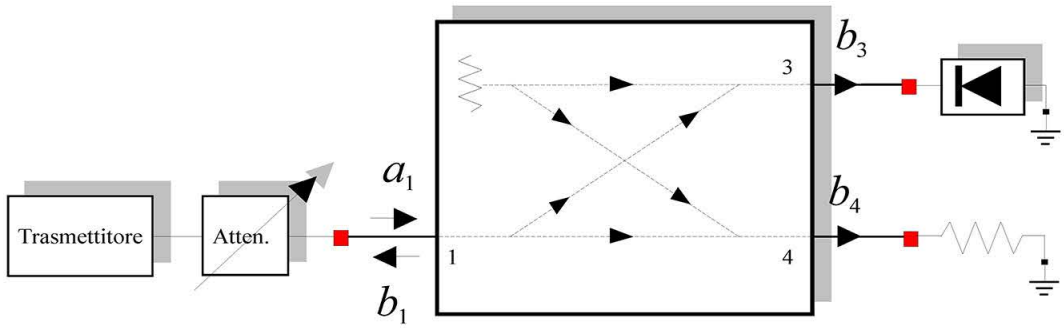


Figura 18.4 - Schema misura della potenza trasmessa.

L'attenuatore ha lo scopo di abbassare la potenza erogata dal trasmettitore, per cui la potenza che viene riflessa dal rivelatore e che esce dalla bocca 1 viene attenuata nuovamente, per cui le riflessioni sulla linea principale vengono ridotte notevolmente. Un'importante applicazione degli ***A.D.*** è quella mostrata in figura 18.5, in cui un ricevitore ed un trasmettitore vengono disaccoppiati in maniera tale da non influenzarsi.

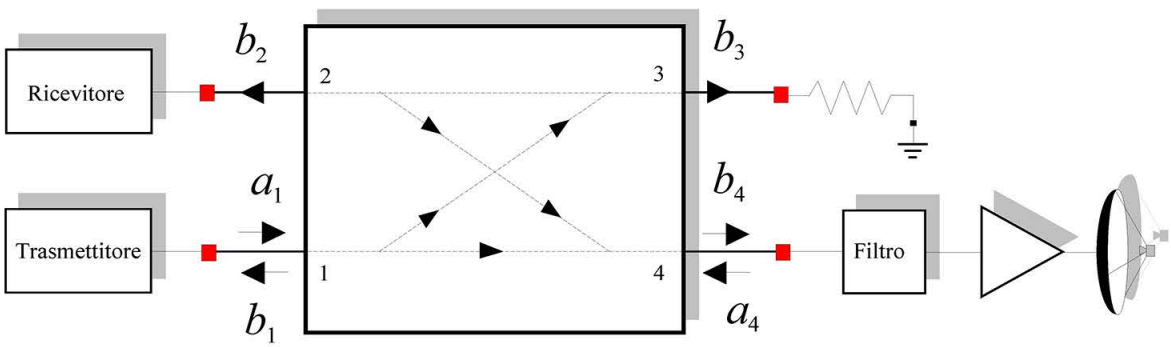


Figura 18.5 - Schema di un ricetrasmettitore con disaccoppiamento.

Il disaccoppiamento è necessario in quanto le potenze ricevute sono di parecchi ordini di grandezza inferiori rispetto alle potenze trasmesse, per cui, se nello schema in figura non vi fosse un ***A.D.*** il ricevitore verrebbe immediatamente saturato dalla potenza del trasmettitore (vedi isolamento). Quando il sistema viene usato in trasmissione è preferibile avere il massimo trasferimento di potenza tra le bocche 1 e 4, e quindi il minimo accoppiamento con la linea secondaria ($|S_{13}| \cong 0$). Viceversa, quando lavoriamo in ricezione, vogliamo che l'accoppiamento tra linea principale e secondaria sia massimo ($|S_{24}| \cong 1$) affinché la potenza ricevuta dalla bocca 4 venga diretta completamente verso la bocca 2. Le condizioni sono purtroppo incompatibili, in quanto negli ***A.D.*** abbiamo $|S_{13}| = |S_{24}|$, per cui si sceglie solitamente la via di mezzo, prendendo accoppiamenti dell'ordine dei $3\,dB$ (divisori di potenza, $|S_{13}| = |S_{24}| = 1/\sqrt{2}$), per cui metà della potenza trasmessa viene persa sul carico adattato,

mentre metà della potenza ricevuta entra esce dalla bocca 1. Oltre che come divisori di potenza, gli ***A.D.*** possono essere utilizzati anche come sommatori. Ricordiamo le proprietà delle giunzioni Ibride secondo le quali:

- Alimentando dalla bocca 1 le uscite 3 e 4 sono in fase.
- Alimentando dalla bocca 2 le uscite 3 e 4 sono in controfase.

Nel caso particolare in cui l'accoppiamento è 3 dB abbiamo uno T Ibrido (T magico, T a 180°), contrariamente al caso degli ***A.D.*** simmetrici chiamati giunzioni a 90° in cui le bocche dello stesso gruppo sono indistinguibili. Se prendiamo uno T ibrido ed utilizziamo le bocche 1,2 come ingressi e le 3,4 come uscite (adattate), dalla sua matrice $[S]$ abbiamo:

$$b_2 = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}$$
$$b_4 = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}$$

per cui le uscite dalle uscite otteniamo la differenza e la somma dei due segnali. Queste proprietà vengono spesso utilizzate nei ricevitori Supereterodina di cui viene dato uno schema in figura 18.6.

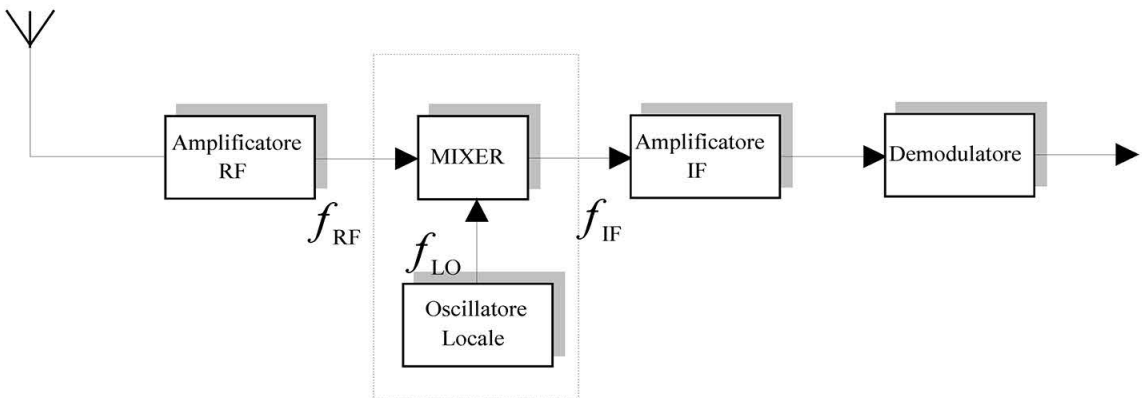


Figura 18.6 - Schema di un ricevitore Supereterodina.

Il segnale a radiofrequenza (*RF*) ricevuto, viene amplificato e successivamente miscelato con il segnale di un Oscillatore Locale (*LO*), per cui dopo opportuni filtraggi otteniamo il segnale a frequenza intermedia (IF), che è più bassa della *RF*, per cui è più facile da trattare. Se per esempio la *RF* è 10 GHz, e LO è 17.9 GHz otteniamo una IF dell'ordine dei 100 MHz. Il convertitore supereterodina ha una configurazione circuitale di questo tipo:

Figura 18.7 - Rappresentazione circuitale del ricevitore supereterodina.

Se alimentiamo le bocche di ingresso con i seguenti segnali:

$$alla\ bocca\ 1 \quad v_L \sin(\omega_L t)$$
$$alla\ bocca\ 2 \quad v_R \sin(\omega_R t)$$

Se alimento dalla 1, alle bocche 3 e 4 si avranno rispettivamente i segnali:

$$\frac{v_L}{\sqrt{2}}\sin(\omega_L t)$$
$$\frac{v_L}{\sqrt{2}}\sin(\omega_L t)$$

Se alimento dalla 2, alle bocche 3 e 4 si avranno rispettivamente i segnali:

$$-\frac{v_R}{\sqrt{2}}\sin(\omega_R t)$$
$$\frac{v_R}{\sqrt{2}}\sin(\omega_R t)$$

Se alimento contemporaneamente dalla 1 e dalle 2, alle bocche 3 e 4 si avranno rispettivamente i segnali:

$$\frac{v_L}{\sqrt{2}}\sin(\omega_L t) - \frac{v_R}{\sqrt{2}}\sin(\omega_R t)$$
$$\frac{v_L}{\sqrt{2}}\sin(\omega_L t) + \frac{v_R}{\sqrt{2}}\sin(\omega_R t)$$

Questi due segnali, vengono inviati sugli elementi non lineari per cui si generano dei prodotti di intermodulazione tra i quali vi sarà quello di tipo quadratico (quelli di ordine superiore si possono trascurare). All'uscita avremo le seguenti frequenze:

$$2\omega_L, \qquad 2\omega_R, \qquad (\omega_L + \omega_R), \qquad (\omega_L - \omega_R)$$

si noti che mentre le prime tre hanno dei valori dell'ordine dei $20\,GHz$ (con riferimento ai valori dell'esercizio precedente), l'ultima vale $100\,MHz$, per cui con un filtro (trasformatore) riesco ad isolarla dalle altre. Il vantaggio che di una

configurazione bilanciata come quella in figura è quello di annullare il rumore dell'oscillatore locale (tipico nei sistemi di ricezione spaziale). Il rumore dell'oscillatore locale giunge in fase alle bocche 3, 4 e viene applicato al primario del trasformatore a presa centrale dove si annulla, si ottiene quindi una massimizzazione del segnale a ***IF*** ed un annullamento del rumore.

Vediamo ora come vengono realizzati gli ***A.D.*** sia simmetrici (90°) che ibridi (180°). Iniziamo a studiare il problema dal punto di vista matematico, tralasciando l'aspetto tecnologico, usando l'approccio delle linee di trasmissione. Schematizziamo L'***A.D.*** con due linee bifilari corrispondenti alla linea principale e secondaria.

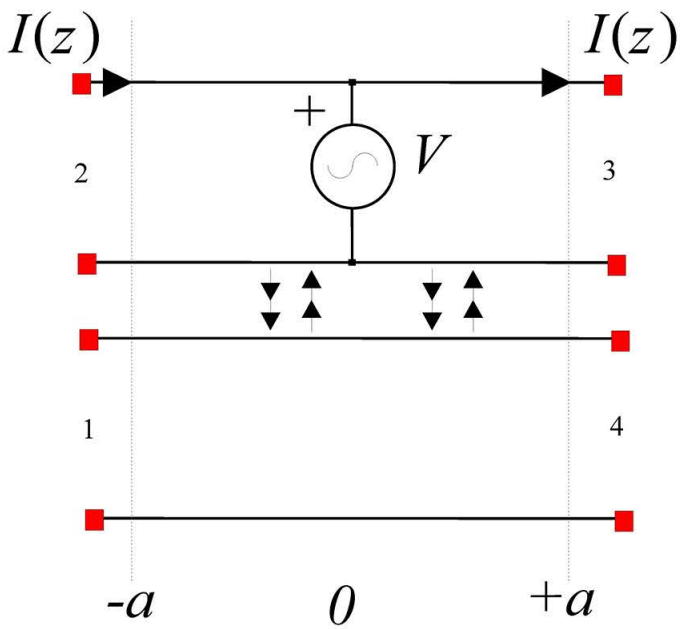


*Figura 18.8 - Schema elettrico di un **A.D.***

Tali linee risulteranno tra loro accoppiate elettromagneticamente. L'influenza di tale accoppiamento può essere schematizzata con la presenza di un generatore sulla linea secondaria, la cui tensione e frequenza saranno controllate dalla linea principale (o meglio alla potenza di ingresso). Il generatore è disposto in maniera tale che le tensioni di uscita alle bocche 2 e 3 sono in fase. In queste condizioni, supponendo la linea adattata, posso scrivere:

$$V(z) = V_3 e^{-j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V_3}{\eta_0} e^{-j\beta z} \qquad \text{per } z > 0$$

$$V(z) = V_2 e^{j\beta z}$$
$$I(z) = -\frac{V_2}{\eta_0} e^{j\beta z} \qquad \text{per } z < 0$$

Per $z = 0$ le due tensioni devono coincidere pertanto $V_2 = V_3 = V$

$$V(z) = V e^{-j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V}{\eta_0} e^{-j\beta z} \qquad \text{per } z > 0$$

$$V(z) = V e^{j\beta z}$$
$$I(z) = -\frac{V}{\eta_0} e^{j\beta z} \qquad \text{per } z < 0$$

Analizzando le due relazioni si vede che in due punti della linea simmetrici rispetto allo zero, che possiamo chiamare $z = a$ e $z = -a$ si ha che la tensione $V(z)$ è una funzione pari di z mentre la $I(z)$ è una funzione dispari di z:

$$V(z) = V(-z)$$
$$I(z) = -I(-z)$$

Questa è la base per poter calcolare come funziona un accoppiatore direzionale. Consideriamo ora il caso in cui il generatore si trova in serie alla linea secondaria:

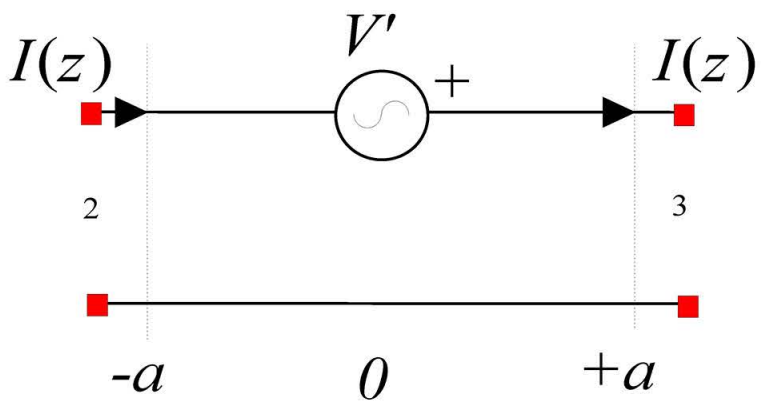


*Figura 18.9 - Schema elettrico di un **A.D.***

Anche in questo caso si supponga che le linee sono adattate (in modo che non vi siano anche le onde riflesse). Per le tensioni e le correnti a destra e a sinistra del generatore abbiamo:

$$V(z) = V_3 e^{-j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V_3}{\eta_0} e^{-j\beta z} \qquad \text{per } z > 0$$

$$V(z) = V_2 e^{j\beta z}$$
$$I(z) = -\frac{V_2}{\eta_0} e^{j\beta z} \qquad \text{per } z < 0$$

Per $z = 0$ in questo caso devono coincidere le correnti, per cui:

$$\frac{V_3}{\eta_0} = -\frac{V_4}{\eta_0} \qquad \Longrightarrow \qquad V_3 = -V_4$$

Inoltre, applicando la legge di *Kirchoff* abbiamo che:

$$V_2 + V' = V_3$$

Abbiamo così ottenuto due equazioni che mi permettono di determinare V_2 e V_3 in funzione di V', infatti:

$$V_3 = -\frac{V'}{2}$$
$$V_2 = \frac{V'}{2}$$

In definitiva risulta che la tensione e la corrente in funzione di z è data dalle:

$$V(z) = \frac{V'}{2} e^{-j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V'}{2\,\eta_0} e^{-j\beta z} \qquad \text{per } z > 0$$

$$V(z) = -\frac{V'}{2} e^{j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V'}{2\,\eta_0} e^{j\beta z} \qquad \text{per } z < 0$$

Da tali relazioni è verificabile che $V(z) = -V(-z)$ (dispari) e che $I(z) = I(-z)$ (pari). Si noti che il generatore V' posto in serie può essere visto nella seguente forma, osservando che per $z > 0$ si genera un'onda di tensione pari a $V'/2\ e^{-j\beta z}$, mentre per $z < 0$ si genera un'onda di tensione pari a $-V'/2\ e^{j\beta z}$. Ciò equivale a considerare una rappresentazione circuitale che renda più chiara la struttura dell'equazione precedentemente trovata:

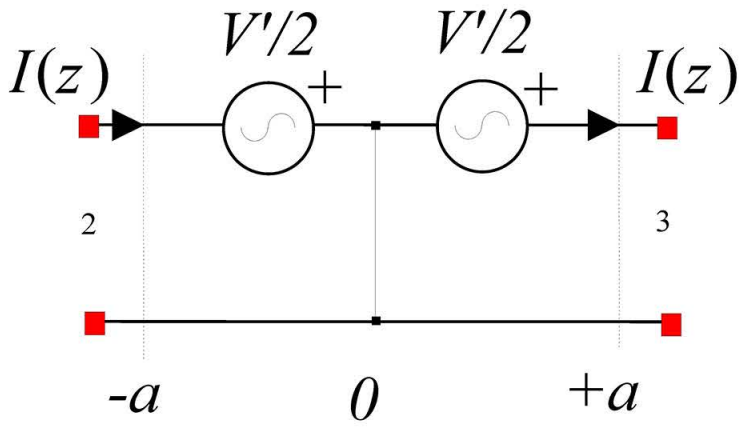


Figura 18.10 - Schema elettrico di un A.D.

La configurazione mostra la forma bilanciata del circuito. Vediamo ora come sia possibile accoppiare in maniera direzionale l'energia sulla base delle considerazioni fatte fino ad ora.

Esaminiamo il caso in cui si hanno 2 generatori posti in parallelo in due punti della linea secondaria.

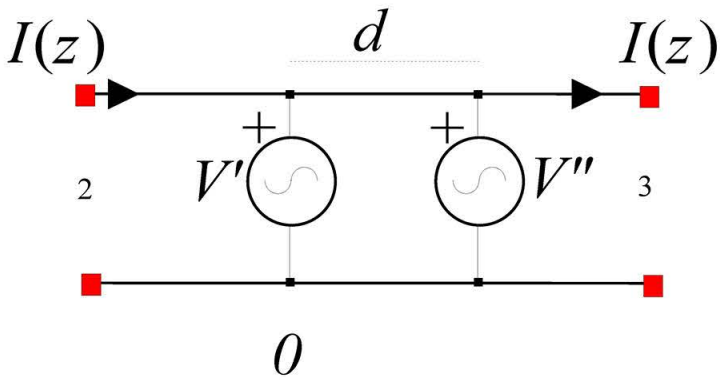


*Figura 18.11 - Schema elettrico di un **A.D.***

Per $z > d$ si ha:

$$V(z) = V'e^{-j\beta z} + V''e^{-j\beta(z-d)} = e^{-j\beta z}\left(V' + V''e^{-j\beta d}\right)$$
$$I(z) = \frac{V(z)}{\eta_0} = \frac{e^{-j\beta z}}{\eta_0}\left(V' + V''e^{-j\beta d}\right) \qquad \text{per } z > 0$$

Per $z < 0$ la tensione e la corrente sono:

$$V(z) = V'e^{j\beta z} + V''e^{j\beta(z-d)} = e^{j\beta z}\left(V' + V''e^{j\beta d}\right)$$
$$I(z) = -\frac{V(z)}{\eta_0} = \frac{e^{j\beta z}}{\eta_0}\left(V' + V''e^{j\beta d}\right) \qquad \text{per } z < 0$$

A questo punto imponiamo che per $\forall\, z < 0$ $V(z) = I(z) = 0$ per cui dalle relazioni precedenti abbiamo:

$$\left(V' + V''e^{-j\beta d}\right) = 0$$

Esprimiamo le tensioni dei generatori in forma polare:

$$V' = |V'|e^{j\phi'}$$
$$V'' = |V''|e^{j\phi''}$$

per cui:

$$|V'|e^{j\phi'} + |V''|e^{j(\phi''-\beta d)} = 0$$

che può essere soddisfatta solo se:

$$|V'| = |V''|$$
$$\phi' = \phi'' - \beta d + \pi$$

Quindi se facciamo in modo che i generatori abbiano uguale modulo e che la loro distanza d sia tale da soddisfare la relazione tra le fasi, otteniamo che la tensione e la corrente per $z < 0$ sono nulle. Supponiamo per esempio di scegliere d in modo che:

$$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

sostituendo nella relazione $\phi' = \phi'' - \beta d + \pi$ otteniamo

$$\phi' - \phi'' = -\frac{(2k+1)\pi}{2} + \pi = -\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

per $k = 0$ la differenza di fase tra i generatori è $\pi/2$ per cui sono in quadratura. Quindi se d è un multiplo dispari di $\lambda/4$, alla sinistra dei generatori la tensione e la corrente sono nulle. Per $z > d$ abbiamo invece:

$$V(z) = e^{-j\beta z}\left(V' + V''e^{-j\beta d}\right)$$

Per $\beta d = \pi/2$ abbiamo:

$$V(z) = j2V''\, e^{-j\beta z}$$

Quindi l'energia viaggia solo nel senso delle $z > d$ (alla sinistra si ha interferenza distruttiva). Un altro tipo di linea che realizza un accoppiamento direzionale è la seguente:

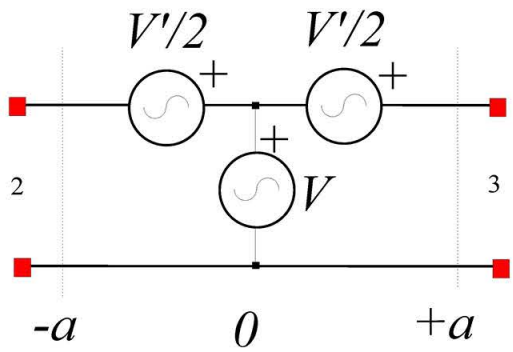


*Figura 18.12 - Schema elettrico di un **A.D.***

In questo caso le equazioni per le tensioni e le correnti lungo la linea sono:

$$\begin{aligned} V(z) &= \left(V + \frac{V'}{2}\right) e^{-j\beta z} \\ I(z) &= \left(\frac{V + V'/2}{\eta_0}\right) e^{-j\beta z} \end{aligned} \qquad \text{per } z > 0$$

$$\begin{aligned} V(z) &= \left(V - \frac{V'}{2}\right) e^{j\beta z} \\ I(z) &= -\left(\frac{V - V'/2}{\eta_0}\right) e^{j\beta z} \end{aligned} \qquad \text{per } z < 0$$

Poniamo l'attenzione sulla legge di variazione di $V(z)$ nel caso in cui tra le tensioni dei generatori vale la relazione:

$$V = \frac{V'}{2}$$

per cui:

$$\begin{aligned} V(z) &= 2V\, e^{-j\beta z} && \text{per } z > 0 \\ V(z) &= 0 && \text{per } z < 0 \end{aligned}$$

Anche in questo caso esiste una direzionalità della linea verso le $z > 0$. Ricordiamo che i due metodi ora visti per ottenere un accoppiamento direzionale sono riferiti all'effetto della linea principale su quella secondaria.

Ricaviamo ora l'espressione della Direttività per questi tipi di accoppiamento. Con riferimento al caso dei due generatori disposti in parallelo abbiamo:

$$\mathbb{D}|_{dB} = 20 \log \frac{|V_{31}|}{|V_{21}|} = 20 \log \frac{\left(V + V'' e^{j\beta d}\right)}{\left(V + V'' e^{-j\beta d}\right)}$$

per cui se $V' = j\,V''$ abbiamo che $\mathbb{D} = \infty$. La realizzazione di queste condizioni è influenzata dalla frequenza, infatti se varia la lunghezza d'onda non è più soddisfatta la $\beta d = \pi/2$, pertanto varia la direttività della linea, con la conseguenza che l'energia fluisce anche verso le $z < 0$. Questo tipo di accoppiamento è utile soltanto in quei casi in cui il segnale è a banda stretta (tecniche radar).

Nel secondo tipo di accoppiamento la direttività è:

$$\mathbb{D}|_{dB} = 20\log\frac{|V_{31}|}{|V_{21}|} = 20\log\frac{\left(V + \frac{V'}{2}\right)}{\left(V - \frac{V'}{2}\right)}$$

In questo caso la relazione $V{=}V'/2$ lega soltanto le ampiezze, pertanto la Direttività non dipende dalla frequenza (in realtà V e V' hanno una dipendenza dalla frequenza molto lenta).

18.1 Tipi di accoppiatori direzionali

Vediamo ora come è possibile realizzare nelle strutture in guida rettangolare accoppiamenti del tipo di quelli visti. Sulle superfici metalliche interne alla guida sono non nulli solo $\underline{E}_n$ e $\underline{H}_y$. Immaginiamo di aver realizzato sulla parete larga di una guida rettangolare un foro circolare che accoppi la guida con l'esterno. Se nella guida si propaga il modo fondamentale TE_{10} le linee di forza del campo elettrico (che sono verticali) si deformano in corrispondenza del foro come in figura 18.13, portando parte della potenza all'esterno.

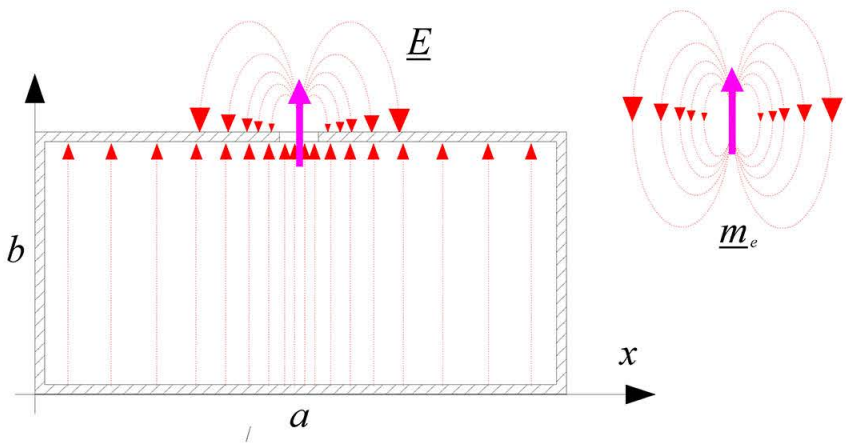


Figura 18.13 - Configurazione del campo elettrico su foro.

Tale campo può essere descritto come la sovrapposizione del campo imperturbato nella guida e del campo di un dipolo elettrico $\underline{m}_e$ con l'asse parallelo all'asse y e

diretto verso l'esterno della guida, con un'intensità dipendente dal campo $\underline{E_n}$. Il piano del dipolo $\underline{m_e}$ in figura è un generico piano dell'asse y poiché il campo di dipolo ha simmetria di rotazione intorno al proprio asse.

Dato che il campo magnetico tangenziale $\underline{H_y}$ non è nullo (sulla superficie metallica), esso genera un accoppiamento con l'esterno. Comunque, se il foro è al centro della parete ed il suo raggio non è troppo grande potremo supporre che $H_z = 0$ e l'accoppiamento avviene solo tramite $\underline{H_t}$. Le linee di forza di $\underline{H_t}$, in corrispondenza del foro, si deformano come in figura 18.8, per cui il campo può ancora considerarsi come una sovrapposizione di quello imperturbato più quello generato da un dipolo magnetico $\underline{m_h}$ parallelo ad $\underline{H_t}$ ma diretto in senso opposto, posizionato sull'asse del foro con un'intensità dipendente da $\underline{H_t}$. Se il foro non fosse nel centro della parete si accoppierebbe anche il campo H_z con l'esterno, per cui il dipolo magnetico risultante avrebbe il verso di $\underline{H}$.

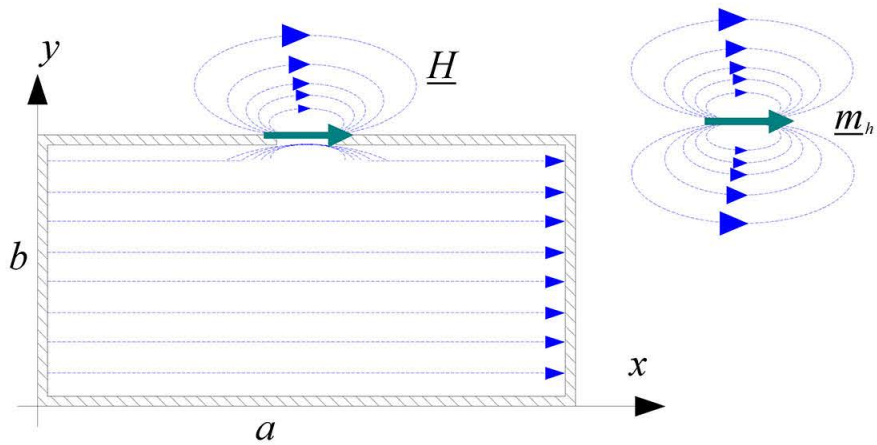


Figura 18.14 - Configurazione del campo magnetico su foro.

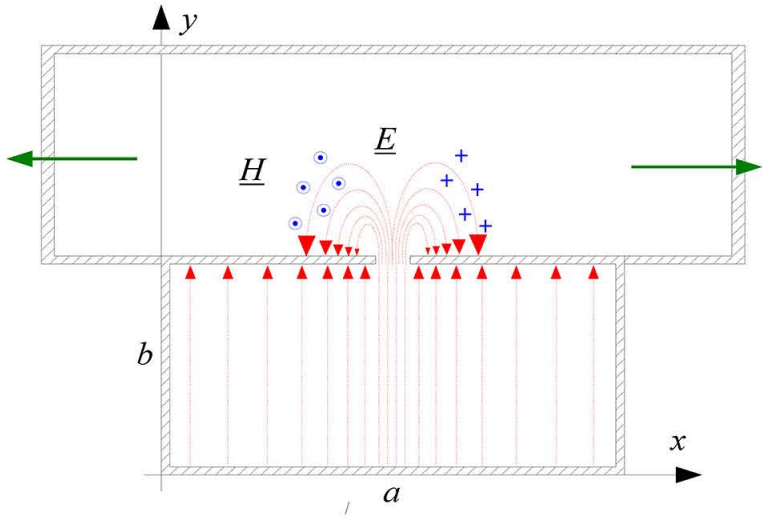


Figura 18.15 - Campo $\underline{H}$ associato al campo $\underline{E}$ accoppiante.

Vediamo ora cosa succede accoppiando due guide a sezione rettangolare mediante un foro praticato al centro della parete larga (figura 18.15). L'accoppiamento avviene sia a causa del campo $\underline{E}_t$, sia tramite $\underline{H}_t$, per cui il campo in corrispondenza del foro è rappresentabile mediante la sovrapposizione dei dipoli delle figure 18.13 e 18.14.

Il campo $\underline{E}$ del dipolo elettrico che si propaga nella guida secondaria è una funzione pari di z, d'altronde il campo magnetico ad esso associato, perché la potenza si propaghi verso le $z > 0$ e verso le $z < 0$ (il foro è in $z = 0$) deve essere diretto verso le x crescenti per $z > 0$ e verso le x decrescenti per $z < 0$ come in figura 18.15 per cui è una funzione dispari.

L'accoppiamento tra le due linee è schematizzabile mediante un generatore di tensione in parallelo alla linea accoppiata. Invece il campo $\underline{H}$ del dipolo magnetico, sul piano xz della guida secondaria, ha le linee di forza illustrate in figura 18.16. Il campo magnetico è chiaramente una funzione pari rispetto all'asse x, mentre il campo elettrico ad associato non può essere che una funzione dispari (per gli stessi motivi legati alla propagazione d'energia). In conseguenza di ciò, l'accoppiamento è schematizzabile come un generatore di tensione disposto in serie alla linea.

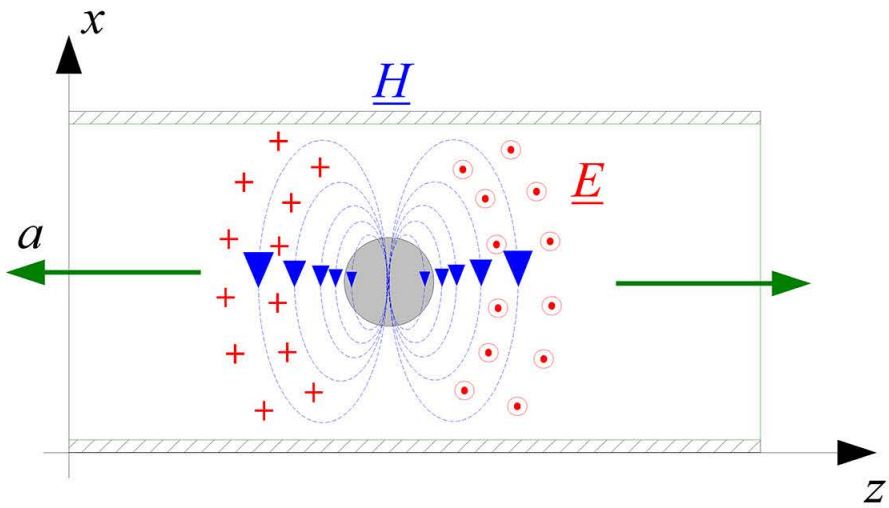


Figura 18.16 - Campo $\underline{E}$ associato al campo $\underline{H}$ accoppiante.

La sovrapposizione dei due dipoli ha un circuito equivalente del tipo in figura 18.12.

Abbiamo mostrato che mediante questo schema si può realizzare un accoppiamento direzionale se $V'/2 = V$. Per verificare questa condizione si realizza una struttura del tipo in figura 18.17 chiamata accoppiatore a foro di *Bethe*, in cui la guida secondaria è in grado di ruotare intorno all'asse del foro in modo che all'accoppiamento magnetico contribuisce soltanto la componente di $\underline{m}_h$ diretta lungo l'asse x (la componente diretta lungo l'asse z tenderebbe a generare modi di ordine superiore che in questa struttura si trovano sotto cut-off). L'accoppiamento elettrico evidentemente non varia.

Quindi scegliendo un angolo α opportuno tra gli assi delle due guide si può realizzare la condizione $V = V'/2$ e quindi ottenere un accoppiatore direzionale. Si noti che la numerazione delle bocche non è casuale, infatti, in accordo alle assunzioni fatte fino ad ora, le bocche disaccoppiate sono le 1,2 e le 3,4.

Questa affermazione può essere verificata andando ad osservare la configurazione del campo ottenuto dalla sovrapposizione dei dipoli elettrico e magnetico (con i campi rispettivamente magnetico ed elettrico generati). In questo modo la potenza nella linea secondaria esce dalla bocca adiacente alla bocca della linea primaria da cui è entrata (l'accoppiatore viene chiamato anche contra-flow).

Ricordiamo che un accoppiamento del tipo descritto è a larga banda, per i motivi già discussi nel precedente capitolo. Un altro modo di realizzare un accoppiatore a larga banda è quello di variare la posizione del foro lungo l'asse x, in modo che il

campo elettrico e magnetico soddisfino alla condizione $V = V'/2$ (in tal modo non vi è la necessità di ruotare le guide).

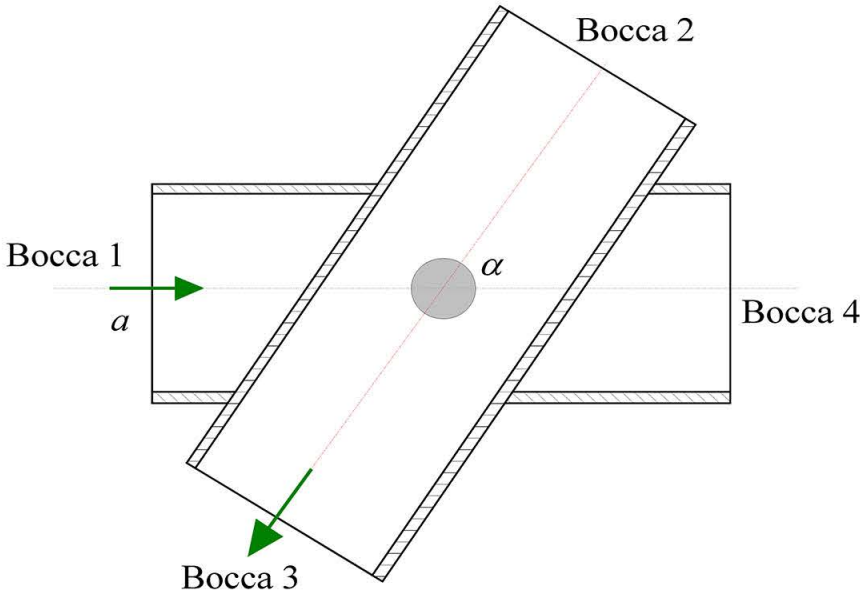


Figura 18.17 - Accoppiatore a foro di Bethe.

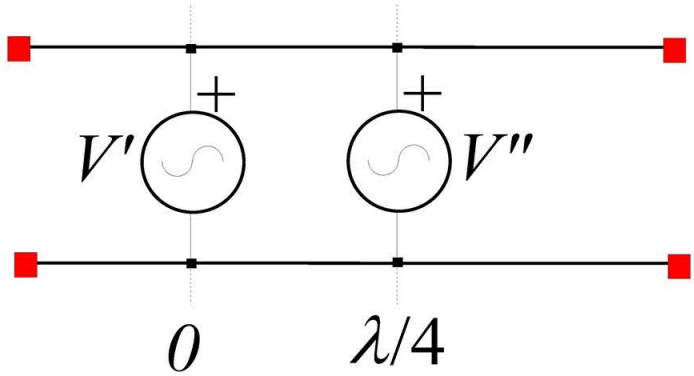


*Figura 18.18 - Schema elettrico di un **A.D.** a λ/4.*

Vediamo ora di studiare qualitativamente un accoppiamento tra due guide, realizzato mediante un foro praticato sulla parete più stretta (figura 18.18). Si ricorda che su questa parete il campo elettrico della guida principale è nullo, pertanto non è in grado di accoppiarsi con la guida secondaria.

Si ha invece un accoppiamento magnetico, infatti le linee di forza del modo fondamentale TE_{10} si deformano come in figura 18.18, pertanto affinché l'energia nella guida secondaria possa fluire in entrambe le direzioni, il campo elettrico associato deve avere il verso delle y crescenti.

Questo accoppiamento è schematizzabile con un generatore in parallelo alla linea secondaria. Si noti, che, a causa dell'incapacità del campo elettrico della guida principale di accoppiarsi con quella secondaria, non è possibile realizzare un accoppiamento direttivo, in quanto l'energia che si accoppia fluisce verso entrambe le bocche della guida secondaria.

Quello che si può fare in questo caso è realizzare un accoppiamento mediante due fori posti ad una distanza $\lambda/4$ figura 18.20. Per quanto detto fino ad ora il circuito equivalente è schematizzabile con due generatori in parallelo posti ad una distanza $\lambda/4$ come illustrato in figura 18.18.

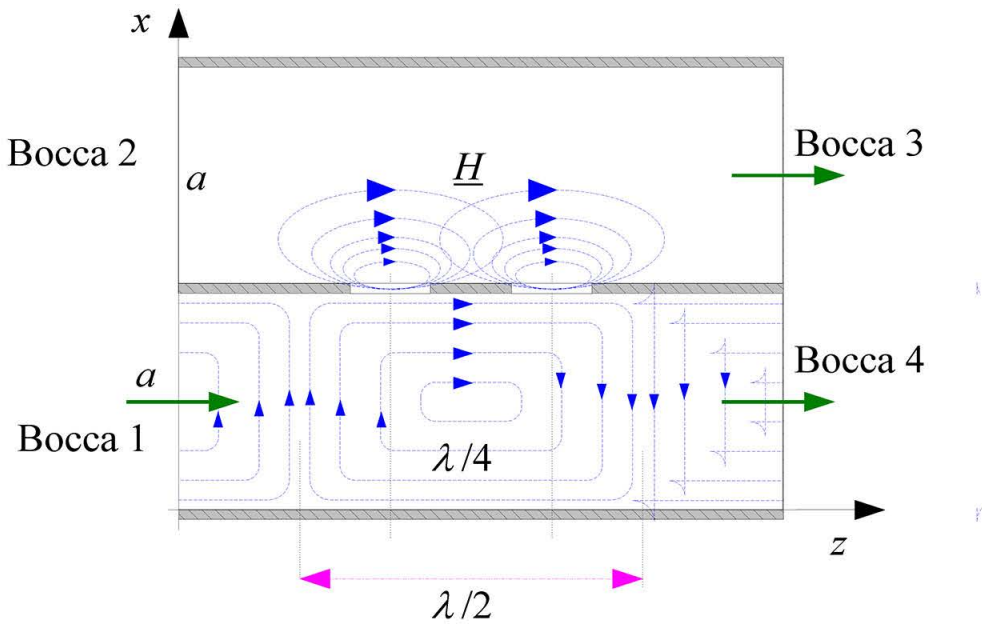


Figura 18.19 - Accoppiamento direzionale magnetico.

Il circuito è in grado di realizzare un accoppiamento a banda stretta, in quanto le tensioni (che sono proporzionali alle ampiezze dei fori) interferiscono distruttivamente per $z < 0$.

In pratica il foro più lontano alla bocca di uscita della linea secondaria, viene fatto leggermente più grande, in modo che la potenza da esso prelevata sia maggiore e quindi sia realizzata la condizione $|V'| = |V''|$.

Anche in questo caso la numerazione delle bocche concorda con la convenzione fatta nei capitoli precedenti, infatti basta osservare come interferiscono i campi uscenti dai fori, per affermare che se alimento dalla bocca 1 la potenza esce dalla bocca 3 (accoppiamento *coflow* a banda stretta).

Nelle tecniche in cavo coassiale gli accoppiatori direzionali vengono realizzati come in figura 18.20. Perché questo sistema sia efficiente è necessario che il tratto $AB \ll \lambda$ in modo che nei punti A e B l'onda che viaggia nella linea principale abbia praticamente la stessa fase. L'accoppiamento avviene sia tramite il campo elettrico $\underline{E}$ sia tramite il campo $\underline{H}$ del modo ***TEM*** nella linea principale, per il quale sappiamo che le linee di forza sono come in figura 18.20.

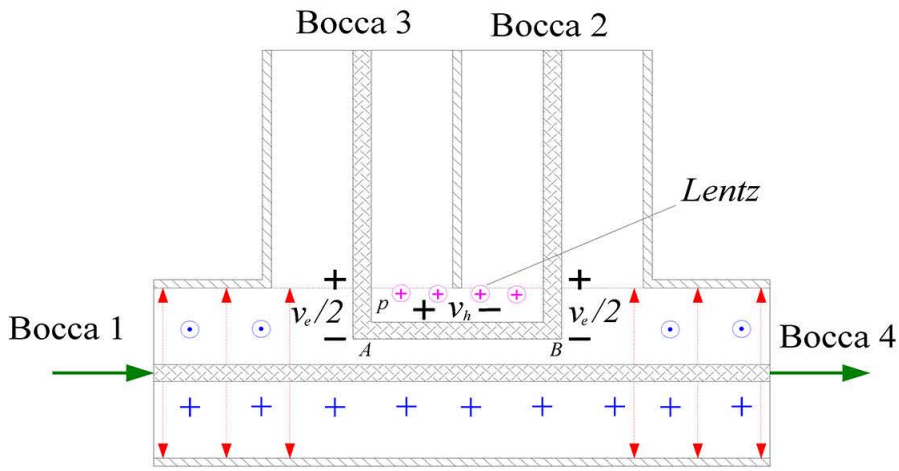


Figura 18.20 - Accoppiatore direzionale in cavo coassiale.

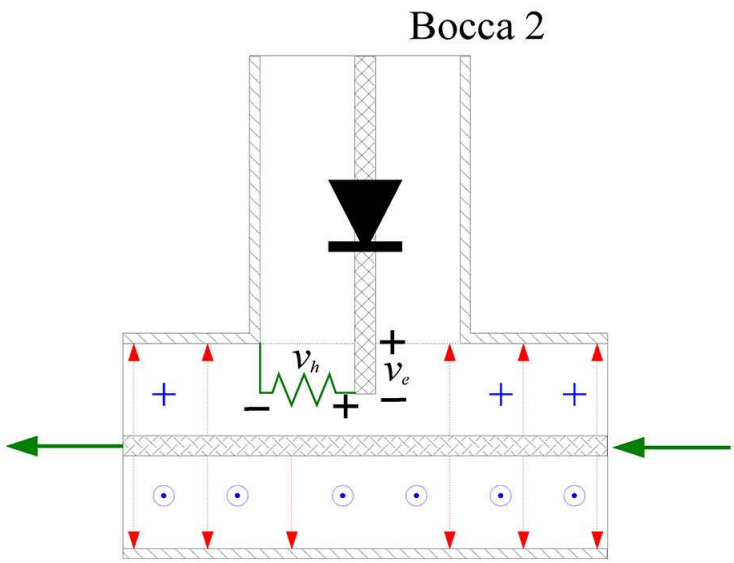


Figura 18.21 - Misuratore direzionale di potenza.

Il campo $\underline{E}$ si accoppia con l'anima dei due cavi coassiali della linea secondaria, ma non con il tratto orizzontale AB. Tale accoppiamento se $AB \ll \lambda$ genera nei due cavi coassiali la stessa differenza di potenziale v_e. Il campo $\underline{H}$ viceversa si accoppia concatenandosi con il tratto AB creando nei due cavi due differenze di potenziale uguali in modulo, ma di verso opposto. Regolando la profondità del conduttore AB,

l'accoppiamento cresce in quanto aumentano i tratti verticali p con cui si accoppia $\underline{E}$. L'accoppiamento magnetico cresce invece con p^2 in quanto aumenta con l'area della spira che avvolge il campo $\underline{H}$.

Scegliendo opportunamente il valore di p possiamo fare in modo che $|v_e| = |v_h|$ per cui potenziali si sommano su di una linea mentre si sottraggono sull'altra, mantenendola disaccoppiata. Si può vedere facilmente, disegnando le linee di flusso dei campi, che la numerazione delle bocche è corretta, per cui dato che la bocca 3 è adiacente alla 1 l'accoppiamento è del tipo contro-flow, infatti questo accoppiamento è a larga banda.

Spesso nella tecnica dei cavi coassiali si realizzano accoppiatori con sole tre bocche accessibili e la quarta adattata internamente.

Un'importante applicazione di tali componenti si nei wattmetri direzionali in cui l'accesso dello strumento nel cavo sotto misura è realizzato come nella figura 18.21. Il tappo contenente il diodo rivelatore può essere ruotato così da disporre la spira contenente la resistenza R sia verso le $z > 0$ che verso le $z < 0$. Il campo $\underline{H}$ si accoppia con tale spira creando una v_h che si somma alla v_e creata dal campo viaggiante in un senso e si sottrae a quella creata dal campo viaggiante nell'altro. Il diodo quindi misura soltanto la potenza viaggiante in un senso (con la disposizione in figura misura la potenza viaggiante nella direzione 4-1).

19 COMPONENTI A FERRITE

Le ferriti sono i materiali anisotropi più usati nella tecnica a microonde per realizzare componenti non reciproci. Le ferriti sono materiali ceramici ottenuti a partire da ossidi del tipo MO e Fe_2O_3, dove M è un metallo bivalente come per esempio Cu, Mn, Mg. La loro conduttanza è dell'ordine dei $g \cong 10^{-7}[(\Omega m)^{-1}]$ per cui possono essere considerati come materiali isolanti, il cui comportamento dielettrico è omogeneo ed isotropo, ma non dispersivo, con $\varepsilon_r = 10 \div 15$.

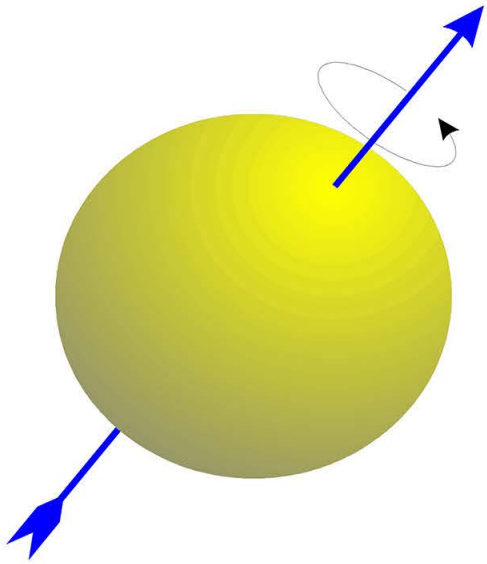


Figura 19.1 - Rotazione di un elettrone.

Vediamo ora di studiare, attraverso un approccio di tipo fisico, il perché del comportamento particolare delle ferriti. Consideriamo il momento angolare $\underline{S}$ di spin di un elettrone dovuto alla rotazione intrinseca intorno ad un asse passante per il suo centro (immaginiamo di rappresentare l'elettrone come una sfera). Ad esso può essere associato un momento magnetico elementare chiamato $\underline{m}$ che è dato dalla relazione:

$$\underline{m} = \gamma \underline{S} \tag{19.1}$$

Dove $\underline{S}$ è il momento angolare elementare, mentre

$$\gamma = -\frac{q}{m_e} \quad \text{Costante di Landè} \tag{19.2}$$

dove q è la carica dell'elettrone in modulo ed m_e è la sua massa. Nei materiali diamagnetici e paramagnetici i momenti magnetici elementari $\underline{m}$ degli elettroni in media si compensano e pertanto non portano contributo al comportamento macroscopico del materiale.

Nelle ferriti invece questo non succede in quanto esiste un certo numero N di momenti magnetici per unità di volume non compensati. Consideriamo ora un momento magnetico elementare inserito in un campo magnetico $\underline{H}$. Su di esso agisce una coppia che, ritenendo valide le equazioni classiche, genera una variazione del momento angolare elementare $\underline{S}$, esprimibile come:

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = \underline{m} \times \underline{H} \tag{19.3}$$

moltiplicando per γ entrambi i membri si ottiene l'equazione:

$$\frac{d\underline{m}}{dt} = \gamma\left(\underline{m} \times \underline{H}\right) \tag{19.4}$$

Ricordando che per unità di volume ci sono N spin non compensati:

$$N\frac{d\underline{m}}{dt} = N\gamma\left(\underline{m} \times \underline{H}\right) \tag{19.5}$$

Si definisce ora la grandezza magnetizzazione $\underline{M}$ come:

$$\underline{M} = N\underline{m} \tag{19.6}$$

che sostituita nella (19.5) da luogo all'equazione della magnetodinamica:

$$\frac{d\underline{M}}{dt} = \gamma\left(\underline{M} \times \underline{H}\right) \tag{19.7}$$

Questa equazione lega solo le grandezze macroscopiche e può essere interpretata come la relazione costitutiva differenziale della materia. Consideriamo ora, per studiare il comportamento statico del materiale, la presenza di un campo $\underline{H}$ costante.

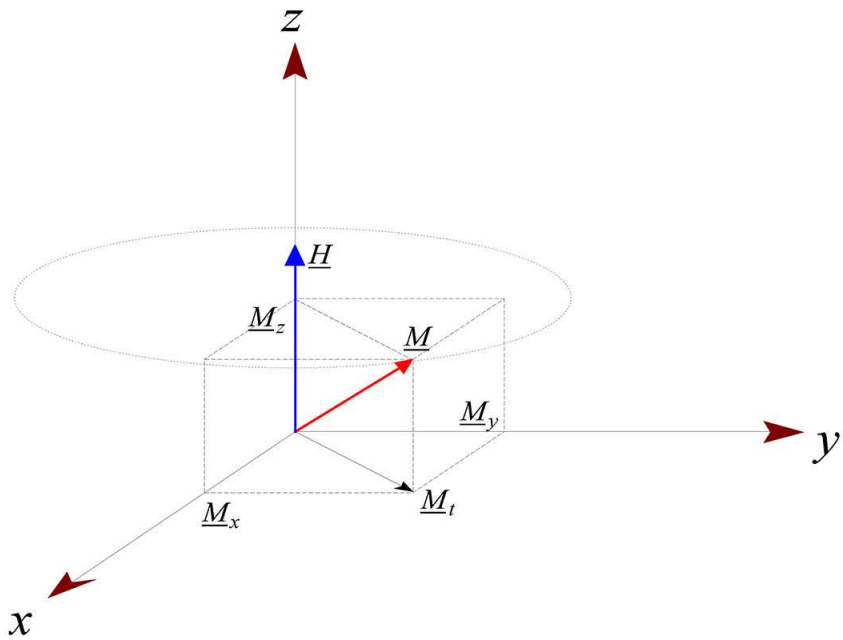


Figura 19.2 - Vettore di magnetizzazione $\underline{M}$.

Consideriamo una terna cartesiana e scomponiamo il vettore $\underline{H}$ e la magnetizzazione $\underline{M}$ nelle loro componenti:

$$\underline{H} = H_x\,\underline{x}_0 + H_y\,\underline{y}_0 + H_z\,\underline{z}_0$$
$$\underline{M} = M_x\,\underline{x}_0 + M_y\,\underline{y}_0 + M_z\,\underline{z}_0$$

L'equazione della magnetodinamica (19.7) diviene:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ M_x & M_y & M_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} \tag{19.8}$$

che può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= \gamma\left(M_y H_z - M_z H_y\right) \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma\left(M_z H_x - M_x H_z\right) \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma\left(M_x H_y - M_y H_z\right) \end{aligned} \tag{19.9}$$

Supponiamo che il campo $\underline{H}$ (costante nel tempo) sia diretto nella direzione dell'asse z:

$$\underline{H} = H_z \underline{z}_0 \tag{19.10}$$

Ponendo $-\gamma\, H_z = \omega_0$, le equazioni (19.9) si semplificano nelle:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma M_y H_z = -\omega_0 M_y \\ \frac{dM_y}{dt} &= -\gamma\, M_x H_z = \omega_0 M_x \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0\end{aligned} \tag{19.11}$$

Le equazioni 19.11 costituiscono un sistema di equazioni differenziali nelle incognite M_x e M_y (Si noti che la componente M_z della magnetizzazione parallela al campo magnetico $\underline{H}$ non subisce variazioni nel tempo, per cui $M_z = K$) per cui con una opportuna scelta dell'istante iniziale le soluzioni sono:

$$\begin{aligned}M_x &= A\cos(\omega_0 t) \\ M_y &= A\sin(\omega_0 t) \\ M_z &= K\end{aligned}$$

Chiamiamo ora con $\underline{M_t}$ la proiezione della magnetizzazione $\underline{M}$ sul piano xy (figura 19.2)

$$\underline{M_t} = M_x\, \underline{x}_0 + M_y\, \underline{y}_0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{M} = \underline{M_t} + M_z\, \underline{z}_0$$

Si noti che il vettore $\underline{M}$ è formato da una componente M_z costante e da un vettore $\underline{M_t}$ di ampiezza A, polarizzato circolarmente sul piano xy.

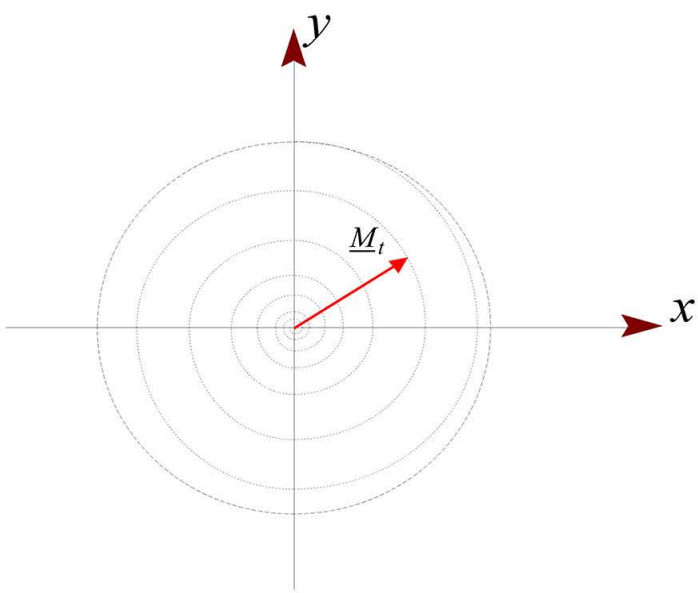


Figura 19.3 - Traiettoria del vettore $\underline{M_t}$.

Quindi nello spazio il vettore M si muove su una superficie conica con asse parallela all'asse z. In realtà, se teniamo conto delle perdite, il vettore $\underline{M_t}$ diminuirà in

ampiezza al passare del tempo, percorrendo con il suo estremo una spirale come in figura 19.3 con la conseguenza che:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{M}_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \underline{M} = M_z\, \underline{z}_0$$

Per cui, dopo un certo intervallo di tempo chiamato tempo di rilassamento, il vettore $\underline{M}$ diviene parallelo al campo $\underline{H}$ per cui la ferrite si dirà satura. È proprio in questo stato che le ferriti hanno una notevole importanza pratica.

Supponiamo che al campo magnetizzante costante $\underline{H}$ venga sovrapposto un campo elettromagnetico dinamico che indicheremo con $\underline{E}(t)$ e $\underline{H}(t)$. Pertanto, dopo la fase di rilassamento possiamo scrivere:

$$\underline{H} = \underline{H}(t) + H_z\, \underline{z}_0 \qquad\qquad \underline{M} = \underline{M}(t) + M_z\, \underline{z}_0$$

L'equazione della magnetodinamica continua ad essere valida, pertanto:

$$\frac{d\underline{M}}{dt} = \gamma\big(\underline{M} \times \underline{H}\big) = \gamma\big[\big(\underline{M}(t) + M_z\, \underline{z}_0\big) \times \big(\underline{H}(t) + H_z\, \underline{z}_0\big)\big]$$

$$= \gamma\big\{M_z\big[\underline{z}_0 \times \underline{H}(t)\big] + H_z\big[\underline{M}(t) \times\, \underline{z}_0\big] + \big[\underline{M}(t) \times\, \underline{H}(t)\big]\big\} \qquad (19.12)$$

A causa del termine $\underline{M}(t) \times \underline{H}(t)$ l'equazione non è più lineare, per cui la ferrite magnetizzata a rigore non ha un comportamento lineare, tanto è vero che in alcune applicazioni le ferriti si utilizzano sfruttando questa proprietà. Facciamo ora due ipotesi fondamentali sulla natura del campo magnetico variabile:

1) Il campo $\underline{H}(t)$ è di tipo armonico sinusoidale, cioè:

$$\underline{H}(t) = \underline{H}_0 \sin(\omega_0 t)$$

2) Il campo magnetico dinamico deve essere, in modulo, molto minore del campo magnetizzante, cioè:

$$\big|\underline{H}(t)\big| \ll H_z$$

3) In base a questa seconda ipotesi si può ammettere che anche per l'intensità di magnetizzazione valga:

$$\big|\underline{M}(t)\big| \ll M_z$$

Tornando all'equazione (19.12) si noti che in base alla seconda ipotesi, il termine $\underline{M}(t) \times \underline{H}(t)$ può essere trascurato, quindi:

$$\frac{d\underline{M}}{dt} = \gamma\{M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(t)] + H_z[\underline{M}(t) \times \underline{z}_0]\} \tag{19.13}$$

Dato che le grandezze in esame hanno un andamento di tipo armonico sinusoidale, è possibile passare nel dominio della frequenza dove l'operatore di derivazione si trasforma in una moltiplicazione per $j\omega_0$, ed i vettori reali si trasformano in vettori complessi (useremo comunque la stessa simbologia usata per i vettori reali).

$$j\omega\underline{M}(\omega) = \gamma\{M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + H_z[\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0]\} \tag{19.14}$$

Moltiplichiamo ora scalarmente ambo i membri per $\underline{z}_0$

$$j\omega\underline{M}(\omega) \cdot \underline{z}_0 = \gamma\{M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] \cdot \underline{z}_0 + H_z[\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0] \cdot \underline{z}_0\}$$

Si noti che il secondo membro è zero in quanto i vettori dei prodotti scalari sono evidentemente ortogonali, pertanto otteniamo che:

$$j\omega\underline{M}(\omega) \cdot \underline{z}_0 = 0$$

Quindi il vettore $\underline{M}(\omega)$ è ortogonale all'asse z.

Moltiplichiamo ora la (19.14) vettorialmente a sinistra per $\underline{z}_0$:

$$j\omega\left(\underline{z}_0 \times \underline{M}(\omega)\right) = \gamma\{M_z\,\underline{z}_0 \times [\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + H_z\,\underline{z}_0 \times [\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0]\}$$

sviluppando i prodotti a secondo membro ricordando che:

$$\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$$

dopo opportune semplificazioni si arriva all'equazione:

$$j\omega\left(\underline{z}_0 \times \underline{M}(\omega)\right) = \gamma\left\{M_z\left[\underline{z}_0 \cdot \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{H}(\omega)\right) - \underline{H}(\omega)\right] + H_z\underline{M}(\omega)\right\}$$

Il primo termine a secondo membro può essere scritto come:

$$\underline{z}_0 \cdot \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{H}(\omega)\right) - \underline{H}(\omega) = \underline{z}_0 \cdot \underline{H}(\omega) - \underline{H}(\omega) = -H_x(\omega)\,\underline{x}_0 - H_y(\omega)\,\underline{y}_0$$

che è un vettore che giace sul piano xy e che può essere indicato con:

$$\underline{H}_t(\omega) = H_x(\omega)\,\underline{x}_0 + H_y(\omega)\,\underline{y}_0$$

per cui:

$$j\omega\left(\underline{z}_0 \times \underline{M}(\omega)\right) = \gamma\{-M_z\underline{H}_t(\omega) + H_z\underline{M}(\omega)\}$$

Prendiamo ora in considerazione il sistema formato dalle due seguenti equazioni:

$$j\omega\underline{M}(\omega) = \gamma\{M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + H_z[\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0]\}$$

$$j\omega\left(\underline{z}_0 \times \underline{M}(\omega)\right) = \gamma\{-M_z\underline{H}_t(\omega) + H_z\underline{M}(\omega)\}$$

quello che faremo è eliminare dalle due equazioni il termine $\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0$. A tal proposito moltiplichiamo la prima per $j\omega_0$ e la seconda per γH_z.

$$-\omega^2\underline{M}(\omega) - j\omega\gamma H_z[\underline{M}(\omega) \times \underline{z}_0] = j\omega\gamma M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)]$$

$$j\omega\gamma H_z[\underline{z}_0 \times \underline{M}(\omega)] = -\gamma^2 M_z\underline{H}_t(\omega)H_z + \gamma^2 H_z^2\underline{M}(\omega)$$

Sottraendo membro a membro la seconda alla prima ricaviamo:

$$-\omega^2\underline{M}(\omega) = j\omega\gamma M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + \gamma^2 M_z H_z\underline{H}_t(\omega) - \gamma^2 H_z^2\underline{M}(\omega)$$

Mettendo in evidenza $\underline{M}(\omega)$

$$(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)\underline{M}(\omega) = j\omega\gamma M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + \gamma^2 M_z H_z\underline{H}_t(\omega)$$

Si ricava quindi che:

$$\underline{M}(\omega) = \frac{j\omega\gamma M_z[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + \gamma^2 M_z H_z\underline{H}_t(\omega)}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{j\omega\gamma M_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)}[\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)] + \frac{\gamma^2 M_z H_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)}\underline{H}_t(\omega) \tag{19.15}$$

Notiamo ora che il vettore $\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega)$ giace sul piano sul piano xy come del resto $\underline{H}_t(\omega)$, per cui chiamando con:

$$\underline{H}(\omega) = H_x(\omega)\,\underline{x}_0 + H_y(\omega)\,\underline{y}_0 + H_z(\omega)\,\underline{z}_0$$
$$\underline{M}(\omega) = M_x(\omega)\,\underline{x}_0 + M_y(\omega)\,\underline{y}_0 + M_z(\omega)\,\underline{z}_0$$

abbiamo che:

$$\underline{H}_t(\omega) = H_x(\omega)\,\underline{x}_0 + H_y(\omega)\,\underline{y}_0$$
$$\underline{z}_0 \times \underline{H}(\omega) = -H_y(\omega)\,\underline{x}_0 + H_x(\omega)\,\underline{y}_0$$

quindi la (19.15) può essere scritta come:

$$\underline{M}(\omega) = \frac{-j\omega\gamma M_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)}\left[H_y(\omega)\,\underline{x}_0 - H_x(\omega)\,\underline{y}_0\right] + \frac{\gamma^2 M_z H_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)}\left[H_x(\omega)\,\underline{x}_0 + H_y(\omega)\,\underline{y}_0\right]$$

Per cui le componenti del vettore $\underline{M}(\omega)$ sono:

$$\begin{cases} M_x(\omega) = \dfrac{\gamma^2 M_z H_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)} H_x(\omega) - \dfrac{j\omega\gamma M_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)} H_y(\omega) \\ M_y(\omega) = \dfrac{\gamma^2 M_z H_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)} H_y(\omega) + \dfrac{j\omega\gamma M_z}{(\gamma^2 H_z^2 - \omega^2)} H_x(\omega) \\ M_z(\omega) = 0 \end{cases}$$

Dividiamo nominatore e denominatore di ogni componente per $\gamma^2 H_z^2$ e poniamo:

$$\tau = \frac{-\omega}{\gamma H_z}$$
$$\rho = \frac{\gamma M_z}{\gamma H_z} = -\frac{\gamma M_z}{\omega_0}$$

Otteniamo così:

$$\begin{cases} M_x(\omega) = \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)} H_x(\omega) + \dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} H_y(\omega) \\ M_y(\omega) = -\dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} H_x(\omega) + \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)} H_y(\omega) \\ M_z(\omega) = 0 \end{cases}$$

Ricordando che l'induzione magnetica $\underline{B}$ è pari a:

$$\underline{B}(\omega) = \mu\left[\underline{H}(\omega) + \underline{M}(\omega)\right] \tag{19.17}$$

Ricaviamo le sue componenti

$$\begin{cases} B_x(\omega) = \mu_0 \left[1 + \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)}\right] H_x(\omega) + \mu_0 \dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} H_y(\omega) \\ B_y(\omega) = -\mu_0 \dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} H_x(\omega) + \mu_0 \left[1 + \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)}\right] H_y(\omega) \\ B_z(\omega) = \mu_0 H_z(\omega) \end{cases} \tag{19.18}$$

È evidente che la relazione tra il campo magnetico $\underline{H}(\omega)$ e $\underline{B}(\omega)$ è di tipo tensoriale, cioè la permeabilità magnetica non è più un numero complesso, ma una matrice a tre dimensioni di termini complessi. Ponendo infatti:

$$\underline{B}(\omega) = \underline{\mu} \cdot \underline{H}(\omega)$$

Abbiamo:

$$\underline{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \left[1 + \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)}\right] & \dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} & 0 \\ -\dfrac{j\tau\rho}{(1-\tau^2)} & \left[1 + \dfrac{\rho}{(1-\tau^2)}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19.19}$$

Ponendo:

$$\mu_1 = \left[1 + \frac{\rho}{(1-\tau^2)}\right], \qquad \mu_2 = \frac{\tau\rho}{(1-\tau^2)}$$

$$\underline{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19.19}$$

La grandezza che lega il campo magnetico all'induzione è pertanto un tensore permeabilità *Hermitiano*, che conferma la natura anisotropa della ferrite magnetizzata. Un tensore del tipo (19.19) si dice diretto lungo z intendendo con questo che il campo magnetico polarizzante è diretto nella direzione dell'asse z (è immediata la forma delle (19.19) nel caso di tensori diretti lungo x o lungo y).

Passiamo ora a studiare la propagazione di un'onda *e.m.* nella ferrite magnetizzata, sempre nell'ipotesi che $|\underline{H}(t)| \ll H_z$. Cerchiamo in particolare le soluzioni delle equazioni di *Maxwell* del tipo onde piane uniformi propagantesi nella direzione positiva dell'asse z:

$$\underline{E} = \underline{E}_s\, e^{-j\beta z}, \qquad \underline{H} = \underline{H}_s\, e^{-j\beta z}$$

con

$$\underline{E}_s = E_x\underline{x}_o + E_y\underline{y}_o$$
$$\underline{H}_s = H_x\underline{x}_o + H_y\underline{y}_o$$

Le equazioni nel caso che il materiale sia caratterizzato dal solo tensore permeabilità (esiste infatti anche il tensore dielettrico) sono:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\underline{B} = -j\omega\, \underline{\mu} \cdot \underline{H}$$
$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\underline{D} = j\omega\varepsilon\underline{E}$$

Facciamo l'operazione di rotore alla seconda equazione:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\left(\nabla \times \underline{E}\right) = \nabla\left(\nabla\underline{H}\right) - \nabla^2\underline{H} \tag{19.20}$$

Nel caso in cui la permeabilità magnetica non è un tensore abbiamo che $\nabla\underline{B} = 0$ per cui anche $\nabla\underline{H} = 0$, in questo caso invece la $\nabla\underline{B} = 0$ non implica che debba essere $\nabla\underline{H} = 0$, infatti:

$$\nabla\underline{B} = \nabla\left(\underline{\mu} \cdot \underline{H}\right) = 0$$

dalla quale non si può concludere nulla sulla divergenza di $\underline{H}$. Nel nostro caso però il vettore $\underline{B}$ è solo funzione di z essendo tale $\underline{H}$, per cui:

$$\nabla \underline{B} = \frac{dB_z}{dz} = 0$$

Ma dal tensore $\underline{\underline{\mu}}$ si ricava che le componenti lungo z sono legate come:

$$B_z = \mu_0 \, H_z$$

per cui:

$$\nabla \underline{H} = \frac{dH_z}{dz} = 0$$

Pertanto, nel nostro caso particolare la (19.20) diviene:

$$\nabla^2 \underline{H} + \omega^2 \varepsilon \, \underline{\mu} \cdot \underline{H} = 0$$

Dato che cerchiamo soluzioni del tipo onda piana abbiamo:

$$\nabla^2 \left(\underline{H}_s \, e^{-j\beta z} \right) + \omega^2 \varepsilon \, \underline{\mu} \cdot \underline{H}_s \, e^{-j\beta z} = 0$$
$$-\beta^2 \underline{H}_s \, e^{-j\beta z} + \omega^2 \varepsilon \, \underline{\mu} \cdot \underline{H}_s \, e^{-j\beta z} = 0$$
$$\beta^2 \underline{H}_s = \omega^2 \varepsilon \, \underline{\mu} \cdot \underline{H}_s$$

che è un sistema di equazioni lineare omogeneo nelle variabili H_x e H_y:

$$\begin{cases} \beta^2 H_x = \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \left[\mu_1 H_x + j\mu_2 H_y \right] \\ \beta^2 H_y = \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \left[-j\mu_2 H_x + \mu_1 H_y \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_1 - \beta^2) H_x + j\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_2 H_y = 0 \\ -j\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_2 H_x + (\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_1 - \beta^2) H_y = 0 \end{cases} \tag{19.21}$$

Affinché il sistema ammetta soluzioni il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo:

$$(\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_1 - \beta^2)^2 - (\omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_2)^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_1 - \beta^2 = \pm \, \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 \mu_2$$

Quindi, affinché il campo *e.m.* non sia nullo, la costante di propagazione è vincolata ad assumere i seguenti valori:

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 (\mu_1 \pm \mu_2)$$

Se scegliamo $\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \, \mu_0 (\mu_1 - \mu_2)$ e lo inseriamo nelle (19.21) otteniamo:

$$\begin{cases} H_x = -jH_y \\ H_y = jH_x \end{cases}$$

Le componenti del campo magnetico sono in quadratura, quindi l'onda piana che si propaga è polarizzata circolarmente a sinistra, cioè guardando nella direzione di propagazione ($z > 0$) il vettore $\underline{H}$ ruota in senso antiorario, con una costante di propagazione:

$$\beta_s = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu_0(\mu_1 - \mu_2)} \tag{19.22}$$

Il segno $\pm$ denota che l'onda si può propagare sia verso le z positive sia verso quelle negative.

Scegliendo invece $\beta^2 = \omega^2\varepsilon\,\mu_0(\mu_1 + \mu_2)$ e sostituendo nelle (19.21) si ottiene:

$$\begin{cases} H_x = jH_y \\ H_y = -jH_x \end{cases}$$

Quindi in questo caso l'onda è polarizzata circolarmente con senso di rotazione orario e con costante di propagazione:

$$\beta_r = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu_0(\mu_1 + \mu_2)} \tag{19.23}$$

In conclusione, nella ferrite magnetizzata si possono propagare, nella direzione di propagazione, due onde piane uniformi polarizzate circolarmente con costanti di propagazione β_s e β_r. È interessante osservare come variano le costanti β_s e β_r con la frequenza del segnale. Analizziamo il comportamento con la frequenza del termine:

$$\mu_1 \pm \mu_2 = \left[1 + \frac{\rho}{(1-\tau^2)}\right] \pm \frac{\tau\rho}{(1-\tau^2)} = 1 + \frac{\rho}{(1-\tau^2)}(1 \pm \tau) = 1 - \frac{\rho}{(\tau \pm 1)}$$

Per cui:

$$\beta_s = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu_0}\sqrt{1 + \frac{\rho}{(1+\tau)}}$$

$$\beta_r = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu_0}\sqrt{1 + \frac{\rho}{(1-\tau)}}$$

Ricordando che $\tau = \omega/\omega_0$ e $\rho = M_z/H_z$ possiamo disegnare i grafici della figura 19.4.

Figura 19.4

Si noti che β_s è sempre reale, con un andamento asintotico:

$$\lim_{\omega\to\infty} \beta_s = \omega\sqrt{\varepsilon\,\mu_0}$$

Mentre β_r, per $\omega \in [\omega_0, \omega_0(1+\rho)]$ diviene immaginario, per cui l'onda piana corrispondente si attenua esponenzialmente senza riuscire a propagarsi.

Dall'analisi dei grafici si ricava che:

$$\begin{aligned} &\beta_r > \beta_s \implies v_r < v_s \quad per\ \omega < \omega_0 \\ &\beta_r < \beta_s \implies v_r > v_s \quad per\ \omega > \omega_0(1+\rho) \end{aligned}$$

Essendo $\omega_0 = -H_z$, le tre zone significative precedentemente individuate sull'asse delle frequenze si possono spostare cambiando l'intensità del campo magnetizzante H_z.

Ci chiediamo ora se in una ferrite magnetizzata si possono propagare delle onde polarizzate linearmente. Se imponiamo che su un piano $z = 0$, l'onda piana sia polarizzata linearmente, ad esempio lungo $\underline{x}_0$, si può vedere tale onda come la sovrapposizione di due onde polarizzate circolarmente, una verso destra e l'altra verso sinistra. Se $\omega \in [\omega_0, \omega_0(1+\rho)]$ le due onde si propagano con diverse velocità di fase in quanto $\beta_r \neq \beta_s$, per cui, ricomponendo le due onde polarizzate circolarmente su piani $z > 0$ otteniamo un'onda polarizzata linearmente ma con una direzione diversa da quella originale $\underline{x}_0$. Quindi durante la propagazione l'onda ruota il suo asse di polarizzazione in senso orario o antiorario a seconda che $\beta_s > \beta_r$ o $\beta_s < \beta_r$ rispettivamente.

Vediamo più in dettaglio questo fenomeno, prendendo un'onda polarizzata linearmente:

$$\underline{H}(z=0) = H_x\,\underline{x}_0$$

Questa può essere scritta come:

$$\underline{H}(z=0) = \left(\frac{H_x}{2}\,\underline{x}_0 + j\frac{H_x}{2}\,\underline{y}_0\right) + \left(\frac{H_x}{2}\,\underline{x}_0 - j\frac{H_x}{2}\,\underline{y}_0\right) = \underline{H}_d + \underline{H}_s$$

pol. circolare destra pol. circolare sinistra

Il campo su un generico piano z può scriversi come:

$$\underline{H}(z) = \frac{H_x}{2}\left(\underline{x}_0 + j\,\underline{y}_0\right)e^{-j\beta_r z} + \frac{H_x}{2}\left(\underline{x}_0 - j\,\underline{y}_0\right)e^{-j\beta_s z}$$

Per cui le componenti di $\underline{H}(z)$ sono:

$$H_x(z) = \frac{H_x}{2} e^{-j\beta_r z} + \frac{H_x}{2} e^{-j\beta_s z}$$
$$H_y(z) = j\frac{H_x}{2} e^{-j\beta_r z} - j\frac{H_x}{2} e^{-j\beta_s z}$$

le costanti di fase possono essere scritte come:

$$\beta_s = \frac{\beta_s + \beta_r}{2} + \frac{\beta_s - \beta_r}{2}$$
$$\beta_r = \frac{\beta_s + \beta_r}{2} - \frac{\beta_s - \beta_r}{2}$$

per cui le componenti $H_x(z)$ e $H_y(z)$ divengono:

$$H_x(z) = H_x e^{-j\frac{\beta_s+\beta_r}{2}z} \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2} z\right)$$
$$H_y(z) = H_x e^{-j\frac{\beta_s+\beta_r}{2}z} \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2} z\right)$$

La velocità di fase dell'onda lungo z è quindi:

$$v_z = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\omega}{\beta_s + \beta_r}$$

mentre l'angolo che la direzione di polarizzazione forma con l'asse x è:

$$\alpha = \frac{\beta_s - \beta_r}{2} z$$

Nel sistema *c.g.s.* il campo $\underline{H}$ viene espresso in *Oersted* (*Oe*) e si ottiene la seguente relazione dalla $\omega_0 = -H_z$

$$f_0(MHz) \; = \; 2.8\, H_z$$

Notiamo che per ottenere $f_0 = 2.8\, GHz$ nel campo delle microonde, è necessario un campo statico di 1000 Oe. La relazione che si desidera tra la pulsazione di risonanza ω_0 e quella di lavoro ω condiziona il valore di H_z, infatti:

$$\omega > \omega_0 \Longrightarrow H_z < -\frac{2\pi f}{\gamma} = \frac{f(MHz)}{2.8}$$
$$\omega < \omega_0 \Longrightarrow H_z > -\frac{2\pi f}{\gamma} = \frac{f(MHz)}{2.8}$$

Se si vuole quindi che $\beta_s - \beta_r > 0$ si può lavorare con H_z più piccolo del valore $f/2.8$ mentre se si vuole $\beta_s - \beta_r < 0$ si deve lavorare con H_z più grande. Poiché in genere si preferisce lavorare con campi polarizzanti il più piccolo possibile, in genere i componenti a ferrite sono realizzati seguendo la prima scelta che comporta come

visto che il piano di polarizzazione di un'onda piana uniforme che si propaga lungo l'asse z ruota verso destra.

Vedremo ora in che senso ruota il piano di polarizzazione dell'onda regressiva. È chiaro che per l'onda verso le z decrescenti, le onde polarizzate circolarmente si scambiano verso di rotazione e quindi la costante di fase, per cui:

$$\beta_s' = \beta_r$$
$$\beta_r' = \beta_s$$

Naturalmente si ha anche che $Dz' = -Dz$, quindi:

$$\alpha = \frac{\beta_s' - \beta_r'}{2} Dz' = -\frac{\beta_s - \beta_r}{2}(-Dz) = \frac{\beta_s - \beta_r}{2} Dz$$

L'onda regressiva quindi non subisce una rotazione del piano di polarizzazione in senso opposto rispetto a quella progressiva, ma nello stesso senso. Questo effetto, tipicamente non reciproco, si dice effetto *Faraday* ed è alla base di molti componenti a Ferrite.

19.1 Giratore

La prima classe di questi componenti è quella dei giratori. Una guida rettangolare in cui si propaga il modo fondamentale, si raccorda mediante un raccordo a becco di flauto con un tratto di guida circolare al cui interno è inserita una bacchetta di ferrite (come fosse il conduttore interno di un cavo coassiale), con gli estremi smussati per evitare riflessioni.

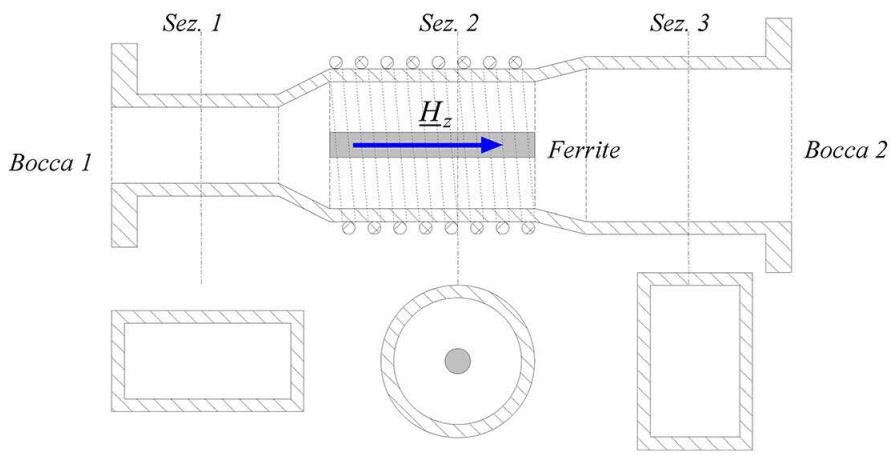


Figura 19.5 - Giratore.

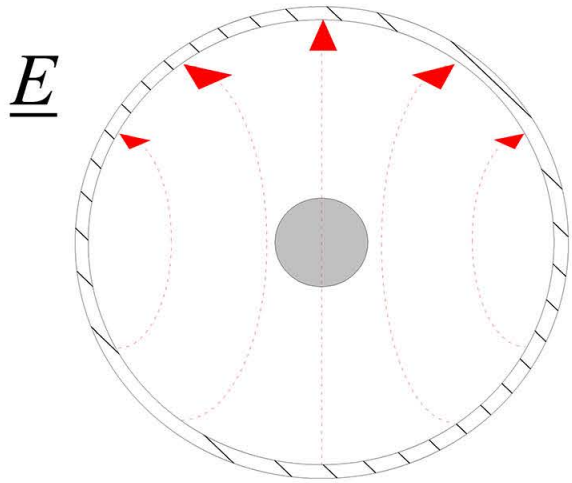


Figura 19.6 - Campo elettrico del modo TE_{11}

Il tratto di ferrite è progettato in modo da imporre al piano di polarizzazione dell'onda nella guida una rotazione di $\pi/2$ alla fine di questo tratto la guida circolare si riconnette con un altro becco di flauto ad una guida rettangolare posta a $\pi/2$ rispetto a quella di ingresso.

In una sezione della guida circolare contenente la ferrite, le linee di forza del campo sono approssimativamente quelle di figura 19.6. Si vede che nella zona della ferrite il campo e circa uniforme se il diametro della ferrite è piccolo rispetto a quello della guida e ciò autorizza in prima approssimazione a considerare la rotazione imposta al piano di polarizzazione dell'onda come se nella ferrite si propagasse un'onda piana uniforme. Entrando con il modo TE_{10} nella guida circolare si eccita con il modo TE_{11} e il piano di polarizzazione dell'onda ruota come in figura ed eccita alla bocca 2 ancora il modo TE_{10}.

L'onda riflessa alla bocca 1 subisce per l'effetto *Faraday* ancora una rotazione di $\pi/2$ nello stesso verso e torna alla bocca 1 sfasato di π con il campo di ingresso. La matrice di scattering del giratore è:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

dato che il componente è senza perdite, la matrice $[S]$ deve soddisfare alla relazione:

$$[S]([S]^T)^* = [1] \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |S_{12}| = |S_{21}| = 1 \\ \theta_{12} = -\theta_{21} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi $S_{21} \neq S_{12}$ per cui, come è ovvio il componente non è reciproco.

19.2 ISOLATORE AD EFFETTO DI FARADAY

Una guida rettangolare, con un twist di 45°, ruota la sua sezione e poi con un raccordo a becco di flauto si immette in un tratto di guida circolare contenente come nel caso precedente una bacchetta di ferrite dimensionata in modo tale da imporre una rotazione di 45° al vettore dell'onda di ingresso. Quindi con un altro raccordo a becco di flauto viene terminata con un altro tratto di guida rettangolare, in asse con quella di ingresso.

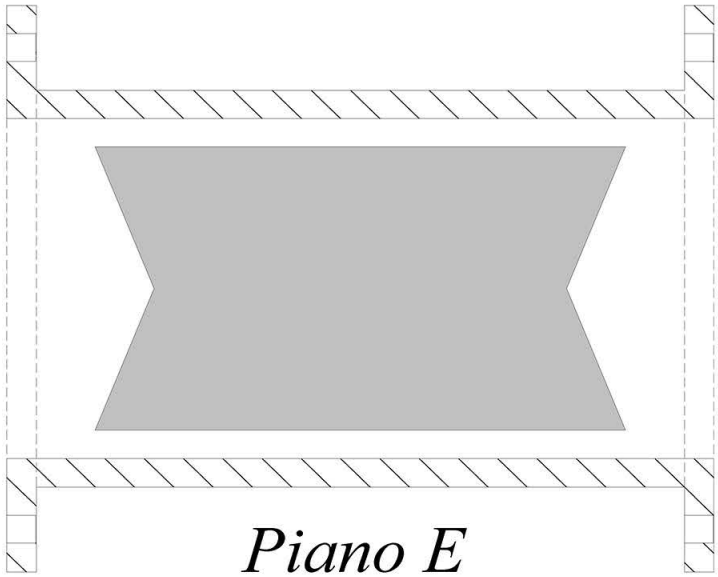


Figura 19.7 - Lamina dissipativa nell'isolatore.

Nella figura 19.5 sono illustrati le varie sezioni del componente e le rotazioni imposte al campo nelle varie parti. Si noti che il campo entrante alla bocca 1, viaggia fino alla sezione 1, dove viene ruotato dal twist meccanico di $\pi/4$, quindi entra, attraverso la sezione 2, nel tratto di guida circolare, dove la ferrite magnetizzata ruota il campo di $-\pi/4$, che quindi nella sezione 3 è in grado di eccitare il modo $\boldsymbol{TE}_{10}$.

L'onda che entra nella bocca 2 viene ruotata sempre di $-\pi/4$ dalla ferrite per cui nella sezione 2 non è in grado di eccitare il modo fondamentale della guida rettangolare e non viene propagata. Quindi l'isolatore consente la trasmissione soltanto nella direzione $1 \rightarrow 2$ e non nel senso opposto.

Se nel tratto di guida rettangolare, immediatamente precedente la sezione 2, introduciamo una lamina di materiale resistivo come in figura 19.7, il campo elettrico dell'onda proveniente dalla bocca 2 si trova parallelo al piano della lamina

che pertanto dissipa la sua energia in calore (un campo elettrico ortogonale alla lamina non viene dissipato). Comunque, in questo caso il componente ha delle perdite per cui la matrice di Scattering è:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

che non verifica ovviamente la $[S]([S]^T)^* = [1]$.

19.3 Circolatore ad effetto Faraday

Un circolatore è un componente ad n bocche, tale che, eccitando la bocca i-esima, si ha uscita solo alla bocca $(i+1)$-esima.

La sua matrice di Scattering è del tipo:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Affinché tale matrice sia unitaria si deve avere:

$$|S_{12}| = |S_{23}| = |S_{34}| = \cdots = |S_{n1}| = 1$$

(Tra le fasi non vi sono vincoli).

Vediamo ora come sia possibile realizzare un circolatore in guida a 4 bocche, con la matrice:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\theta_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\theta_{34}} \\ e^{j\theta_{n1}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

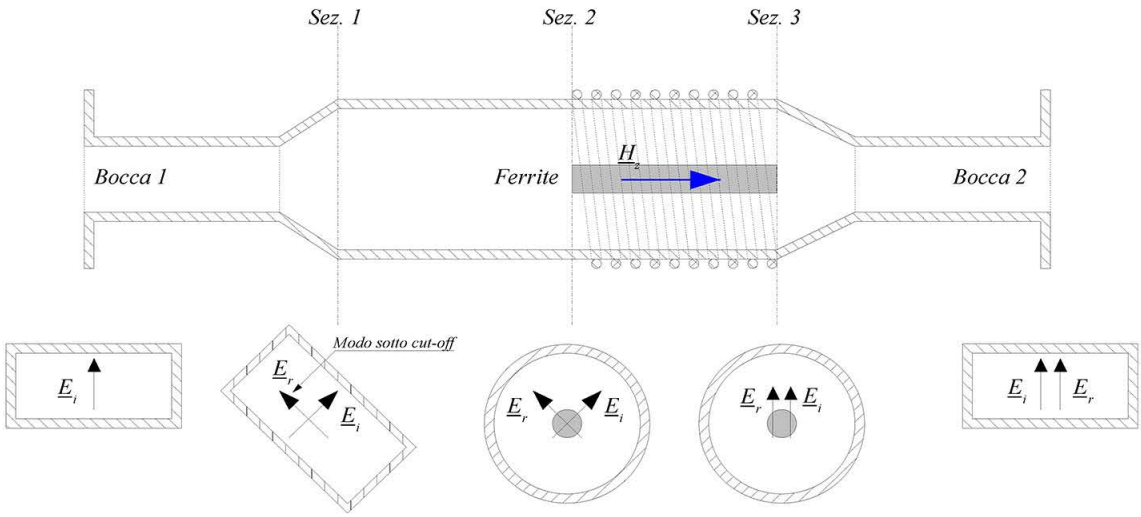


Figura 19.8 - Isolatore.

La struttura è formata da una guida circolare, contenente una sbarretta di ferrite, alla quale sono collegati 4 tratti di guida rettangolare (figura 19.8).

Nelle figure 19.9 possiamo vedere le configurazioni dei campi elettrici sulle varie sezioni. Se eccitiamo il TE_{10} alla bocca 1, questo può accoppiarsi solamente con la bocca 2, mentre se alimentiamo dalla bocca 2 il campo si accoppia con la 3.

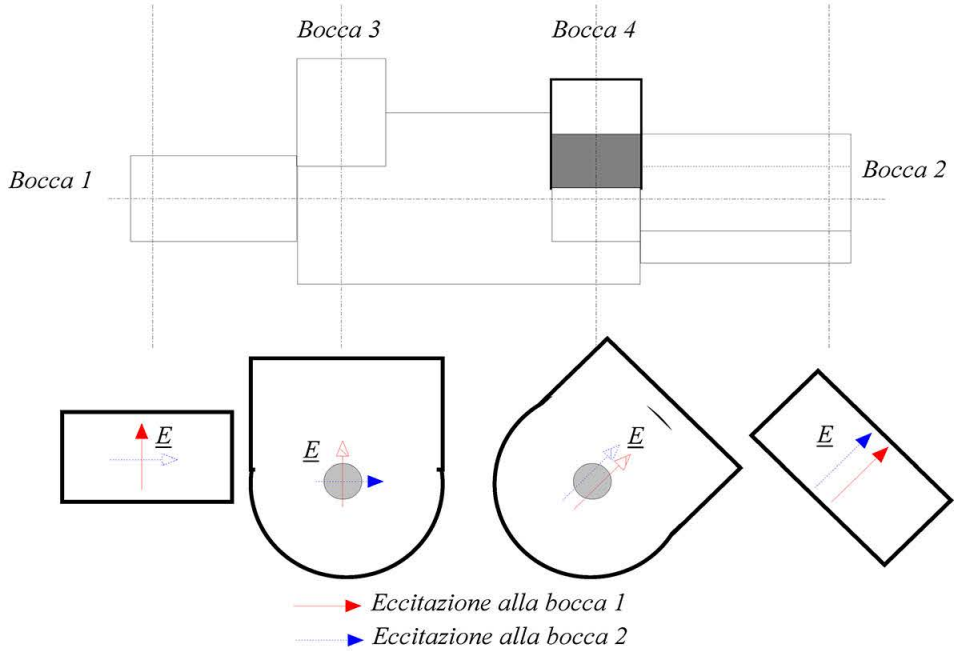


Figura 19.9 -Circolatore a quattro bocche.

Quindi il dispositivo si comporta come un circolatore.

Il grande vantaggio dei componenti a ferrite è la loro sintonizzabilità, infatti, una volta che abbiamo scelto l'angolo di rotazione del campo, e la lunghezza L della sbarretta di ferrite, abbiamo:

$$\frac{\beta_s - \beta_r}{2} L = \alpha$$

Dato che nel termine $\beta_s - \beta_r$ appare sia $\tau = \omega/\omega_0$ che $\rho = M_z/H_z$, posso fare in modo che l'equazione scritta sia soddisfatta per diversi valori di ω, variando opportunamente il campo magnetizzante H_z. I campi magnetici usati sono dell'ordine di grandezza dei $1000 \div 2000\, Oe$ per cui spesso si usa un magnete permanente che fornisce la grande maggioranza del campo, ed un solenoide che permetta di sintonizzare la ferrite sulla frequenza desiderata (quindi è possibile anche un controllo elettronico).

La sintonizzabilità comunque non è facilmente realizzabile a causa della forte non linearità della relazione $\beta_s - \beta_r = f(H_z, \omega)$, per cui in alcuni dispositivi, invece dell'effetto *Faraday*, viene sfruttato il fenomeno della risonanza elettronica delle ferriti. Dalle espressioni:

$$\mu_2 = \frac{\tau\rho}{1-\tau^2}$$
$$\tau = \frac{\omega}{\omega_o}$$

abbiamo che:

$$\lim_{\omega \to \infty} \mu_2 = \infty$$

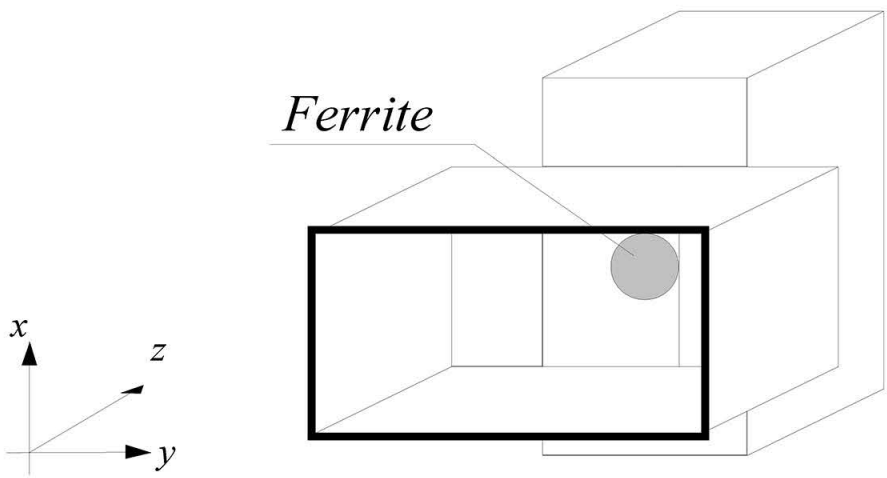


Figura 19.10 - Filtro passa banda sintonizzabile.

per cui per $\omega = \omega_0$ le componenti del tensore μ divengono molto grandi con la conseguenza che per piccoli valori del campo $\underline{H}$ otteniamo delle induzioni $\underline{B}$ elevate (risonanza elettronica).

Questo effetto viene sfruttato nei dispositivi a costanti concentrate del tipo di figura 19.10, in cui, al centro di due spire disposte su piani ortogonali, c'è una pallina di ferrite. Nelle ipotesi che i lati delle spire siano molto minori della lunghezza d'onda del segnale, la ferrite magnetizzata ruota il campo $\underline{B}$ generato da una spira creando un flusso non nullo nell'altra.

Supponiamo infatti che la spira 1 generi il campo $\underline{H} = H_y \underline{y}_0$. L'induzione corrispondente sarà:

$$\underline{B} = B_x \underline{x}_0 + B_y \underline{y}_0$$

Con

$$B_x = j\mu_0 \, \mu_2 \, H_y, \qquad B_y = \mu_0 \, \mu_1 \, H_y$$

Quindi B_x si concatena con la spira 2 creando un accoppiamento. A causa della risonanza magnetica l'accoppiamento sarà funzione della frequenza ω, in quanto vi dipende B_x, che per $\omega = \omega_0$ assume il suo massimo valore. Quindi la struttura si comporta come un filtro passa banda centrato su ω_0, accordabile mediante il campo di polarizzazione H_z. Si noti che la relazione lineare tra ω_0 e il campo H_z, semplifica l'accordabilità del dispositivo, infatti:

$$\omega_0 = -\tau \, H_z$$

Un dispositivo analogo può essere realizzato in guida d'onda rettangolare, come illustrato in figura 19.10.

19.4 Birifrangenza

Consideriamo una sbarretta di ferrite magnetizzata lungo l'asse z da un campo H_z che sia in grado di saturarla. Facciamo ora propagare un'onda piana ortogonalmente alla direzione di magnetizzazione z. Il vettore $\underline{K}$ dell'onda sarà:

$$\underline{K} = K_z \underline{x}_0 + K_r \underline{y}_0$$

per cui il campo elettromagnetico incidente ha la forma:

$$\underline{E} = \underline{E}_0\, e^{-j(K_x x + K_y y)}$$
$$\underline{H} = \underline{H}_0\, e^{-j(K_x x + K_y y)}$$

e deve soddisfare alle relazioni di *Maxwell*

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega \underline{\mu} \cdot \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= -j\omega\, \varepsilon\, \underline{E} \end{aligned} \tag{19.24}$$

Tenendo presente che:

$$\underline{\mu} \cdot \underline{H} = \begin{vmatrix} \mu_1 H_x & j\mu_2 H_y & 0 \\ -j\mu_2 H_x & \mu_1 H_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix}$$

Dato che quando il campo *e.m.* è un'onda piana, l'operatore ∇ diviene $\nabla = -\underline{K}$, per i rotori otteniamo:

$$\nabla \times \underline{E} = -K_y E_z \underline{x}_0 + K_x E_z \underline{y}_0 + (K_y E_x - K_x E_y)\underline{z}_0$$
$$\nabla \times \underline{H} = -K_y H_z \underline{x}_0 + K_x H_z \underline{y}_0 + (K_y H_x - K_x H_y)\underline{z}_0$$

Eguagliando le componenti con i secondi membri delle (19.24) si arriva alle:

$$\begin{cases} K_y E_z = j\omega\, \mu_0(\mu_1 H_x + j\mu_2 H_y) \\ K_x E_z = -j\omega\, \mu_0(\mu_1 H_y - j\mu_2 H_x) \\ K_y E_x - K_x E_y = -j\omega\, \mu_0 H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_y E_z = j\omega\, \varepsilon H_x \\ K_x E_z = -j\omega\, \varepsilon H_y \\ K_y E_x - K_x E_y = j\omega\, \varepsilon H_z \end{cases}$$

Separiamo ora queste equazioni in due gruppi, di cui il primo contenente le grandezze E_z, H_x, H_y (onda ***TE***) ed il secondo contenente le componenti E_x, E_y, H_z (onda ***TM***).

$$I \begin{cases} K_y E_z = j\omega\, \mu_0(\mu_1 H_x + j\mu_2 H_y) \\ K_x E_z = -j\omega\, \mu_0(\mu_1 H_y - j\mu_2 H_x) \\ K_y E_x - K_x E_y = -j\omega\, \varepsilon H_z \end{cases}$$

$$II \begin{cases} K_y E_x - K_x E_y = -j\omega\, \mu_0 H_z \\ K_y E_z = -j\omega\, \varepsilon H_x \\ K_x E_z = j\omega\, \varepsilon H_y \end{cases}$$

Osserviamo che il secondo gruppo non contiene le grandezze μ_1 e μ_2, per cui l'onda ***TM*** corrispondente, non è influenzata dall'effetto dell'anisotropia della ferrite,

pertanto si propaga come se fosse in un mezzo isotropo. A conferma di ciò, imponendo che il determinante dei coefficienti di H_z, E_x, E_y si annulli (condizione necessaria e sufficiente affinché il campo *e.m.* non sia identicamente nullo), si ottiene facilmente:

$$K_x^2 + K_y^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon \tag{19.25}$$

che è la relazione di dispersione tipica di un'onda piana in un mezzo omogeneo ed isotropo. L'onda ***TE*** invece risente dell'effetto di anisotropia della ferrite, infatti le equazioni contengono μ_1 e μ_2. Il determinante dei coefficienti di H_x, H_y, E_z è:

$$\begin{bmatrix} K_x, & -K_y, & -j\omega\,\varepsilon \\ -\omega\mu_0\mu_2 & -j\omega\mu_0\mu_2 & K_x \\ -j\omega\mu_0\mu_2 & \omega\mu_0\mu_2 & K_y \end{bmatrix} = 0$$

Dopo alcuni passaggi si arriva alla:

$$K_x^2 + K_y^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1} = -\omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_{eff} \tag{19.26}$$

Dove

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1} = \frac{\left(1 + \frac{\rho}{1-\tau^2}\right)^2 - \left(\frac{\rho\tau}{1-\tau^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\rho}{1-\tau^2}\right)}$$

Anche il modo ***TE*** quindi si comporta come se si propagasse in un mezzo isotropo, ma con una permeabilità magnetica data da μ_{eff}.

Questo fenomeno viene chiamato *birifrangenza*, infatti, se facciamo incidere un'onda piana su una ferrite, nella direzione ortogonale alla direzione di magnetizzazione, si creano due onde rifratte, una di tipo ***TM*** con velocità di fase (in assenza di attenuazione)

$$v_{TM} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$$

l'altra di tipo ***TE*** con velocità di fase

$$v_{TE} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_{eff} \varepsilon}}$$

19.5 ISOLATORI A RISONANZA

Il modo fondamentale in una guida a sezione rettangolare è il $\mathbf{TE_{10}}$, che ha la seguente configurazione di campo:

$$\begin{cases} \underline{E} = E_y \underline{y}_0 = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \underline{y}_0 \\ \underline{H}_t = H_x \underline{x}_0 = \frac{A}{\eta_z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \underline{x}_0 \\ H_z = j\, C \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \end{cases}$$

La relazione tra le costanti A e C è ricavabile dalle equazioni di *Maxwell*. Il campo $\underline{E}$ è polarizzato linearmente lungo l'asse y, mentre $\underline{H}$ è polarizzato ellitticamente nel piano xz, con l'ellisse di polarizzazione variabile da punto a punto in funzione della coordinata x. Se imponiamo alle componenti di $\underline{H}$ di soddisfare alla:

$$|H_x| = |H_z| \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\eta_z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = C \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Si può ricavare l'ascissa x_s in cui il campo $\underline{H}$ è polarizzato circolarmente:

$$\tan\left(\frac{\pi x_s}{a}\right) = \frac{\eta_z C}{A} \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{a}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\eta_z C}{A}\right)$$

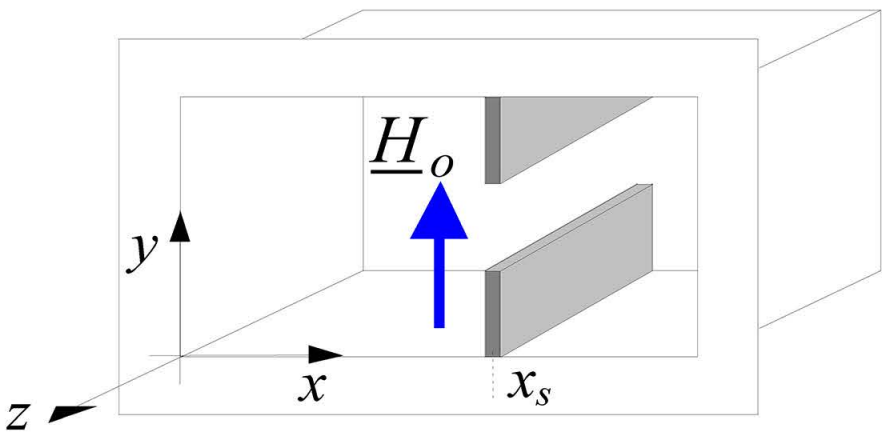


Figura 19.11 - Isolatore a risonanza.

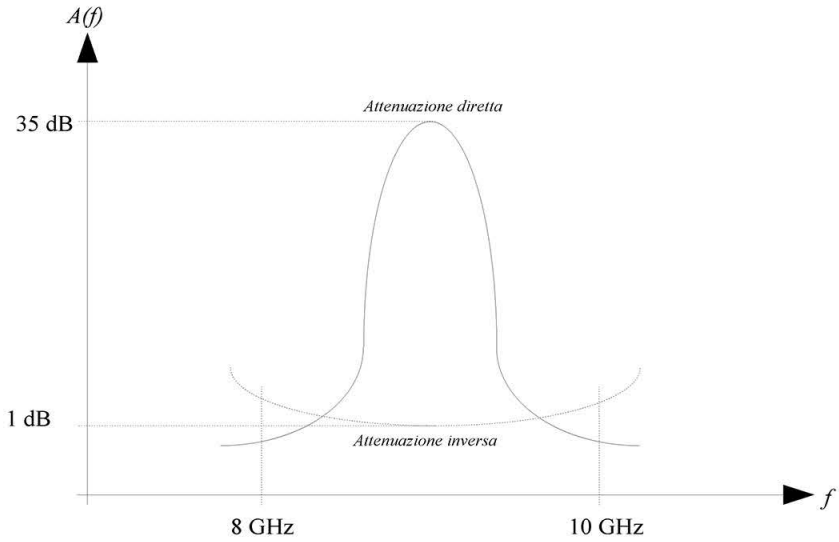


Figura 19.12 - Attenuazione diretta ed inversa.

Supponiamo che il campo in tali punti abbia una rotazione sinistra. Se disponiamo in corrispondenza a $x = x_s$ una lastra sottile di ferrite magnetizzata con un campo $\underline{H_0}$ (figura 19.11) si genera una precessione degli spin della ferrite verso sinistra, sul piano xz, per cui il campo $\underline{H}$ dell'onda progressiva, che è polarizzato nello stesso verso, si accoppia completamente con la ferrite, venendo assorbito.

Il campo dell'onda regressiva invece non si accoppia con la ferrite, dato che la rotazione del vettore $\underline{H}$ è contraria a quella degli spin, per cui non viene assorbito. Il fenomeno si manifesta chiaramente se la frequenza dell'onda *e.m.* che si propaga nella guida è prossima alla frequenza di risonanza ω_0 della ferrite, quindi il componente è un isolatore a banda stretta.

L'attenuazione per unità di lunghezza delle onde diretta e inversa in funzione della frequenza segue qualitativamente l'andamento riportato nel grafico di figura 19.12.

Il componente è ovviamente sintonizzabile, comunque c'è da notare che in questo caso anche la posizione x_s della lamina è funzione della frequenza in quanto vi dipendono le costanti A e C, per cui la sintonizzabilità è limitata tecnicamente dalla possibilità di spostare la lamella di ferrite.

Il rapporto tra l'attenuazione diretta e quella inversa è dell'ordine dei $35 \div 40\ dB$, che si ottengono con campi polarizzanti dell'ordine delle migliaia di Oe, che sono quindi alquanto elevati.

19.6 ISOLATORE A SCOSTAMENTO DI CAMPO

Il suo studio parte dall'analisi elettromagnetica della guida d'onda rettangolare con la lamina di ferrite disposta verticalmente e polarizzata con campo $\underline{H_0}$ molto più basso di quello utilizzato nei dispositivi a che sfruttano il fenomeno della risonanza. Si arriva a dimostrare che nella guida si può propagare ancora il modo fondamentale $\mathbf{TE_{10}}$ (oltre ad un insieme di modi misti).

I valori della costante K_x corrispondenti alle onde $\mathbf{TE_{10}}$ diretta e inversa sono soluzioni di un'equazione trascendente e sono diversi per le due onde.

20 GUIDE A MICROSTRISCIA

La struttura tipica della guida a microstriscia è quella riportata in figura 20.1.

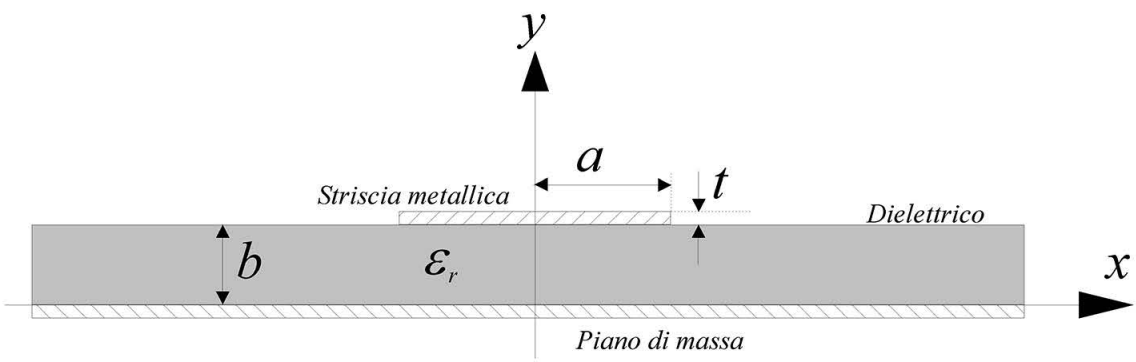


Figura 20.1 - Sezione trasversale di una microstriscia

Sopra un conduttore, che si può supporre indefinito e si chiama piano di massa, è posto un dielettrico di spessore b e costante dielettrica relativa ε_r ($\varepsilon_r > 1$). A completare la struttura guidante viene posta, sulla superficie superiore del dielettrico, una striscia di metallo di larghezza $2a$ e di spessore t (in alcune trattazioni quest'ultima dimensione viene supposta nulla).

La struttura sarà naturalmente considerata indefinita lungo l'asse z (uscente dal foglio) e composta da materiali perfetti (conduttori con $g = \infty$ e dielettrici privi di perdite). Il tutto si può supporre immerso nel vuoto, in quanto l'aria ha le stesse caratteristiche ($\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$).

La struttura non può guidare un'onda di tipo ***TEM*** a causa della discontinuità in corrispondenza dei due dielettrici. Infatti, si ricorda che per un'onda di tipo ***TEM*** deve essere rispettata la relazione $K_z^2 = K^2$ (ovvero $K_t^2 = 0$), mentre nei due dielettrici si hanno due velocità dell'onda diverse:

$$K_z^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0, \qquad v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$K_{z1}^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r, \qquad v_{g1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

Il fatto che $v_g \neq v_{g1}$ rende impossibile imporre le condizioni le condizioni di continuità sulla superficie di separazione dei due dielettrici.

Anche se non è nota la soluzione esatta del problema elettromagnetico, in una struttura del genere si può studiare lo spettro modale approssimato dal quale si

potrà vedere che la maggior parte della potenza del campo elettromagnetico è confinata nel dielettrico al disotto della striscia metallica (questa affermazione e tanto più vera quanto più è alta la frequenza di lavoro).

In base a quanto detto possiamo pensare che la configurazione del modo propagantesi, si discosterà leggermente dalla configurazione ***TEM*** e quindi possiamo scrivere che:

$$E_z \ll \underline{E}_t, \qquad H_z \ll \underline{H}_t$$

allora in prima approssimazione si può pensare che tale modo sia proprio un modo ***TEM*** e cercare di risolvere nella struttura in esame le equazioni:

$$\nabla_t^2 \Psi = 0$$

con le condizioni al contorno:

$$\Psi = \Psi' \quad \text{per } y = b \quad \text{e } -a < x < a$$

$$\Psi = \Psi' \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e } \forall x$$

e per i campi trasversi:

$$\underline{e}_t = -\nabla_t \Psi$$
$$\underline{h}_t = \frac{1}{\eta_z} \underline{z}_0 \times \underline{e}_t$$

(Ove le funzioni scritte sono funzioni di x e y, per ottenere le grandezze in tutto lo spazio vanno moltiplicate per il fattore di propagazione $Z(z)$).

Poiché si può vedere che il modo quasi ***TEM*** che cerchiamo è tale che E_z e H_z crescono con la frequenza, la nostra approssimazione sarà valida solo entro un certo campo di frequenze, finché appunto:

$$E_z \ll |\underline{E}_t|, \qquad H_z \ll |\underline{H}_t|$$

Il problema elettromagnetico che abbiamo impostato va completato con l'imposizione delle condizioni di continuità delle componenti tangenziali dei campi alla separazione tra i due dielettrici. Intanto deve essere continua la componente $\underline{x}_0 \cdot \underline{e}_t$.

$$\underline{x}_0 \cdot \underline{e}_t = -\nabla_t \Psi \cdot \underline{x}_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Dette Ψ' e Ψ'' le funzioni Ψ rispettivamente nell'aria e nel dielettrico, deve essere:

$$\lim_{y\to b-}\frac{\partial\Psi''}{\partial x}=\lim_{y\to b+}\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\qquad \text{per } x>a \text{ ed } x<-a$$

deve essere poi continua $\underline{x}_0\cdot\underline{h}_t$

$$\underline{x}_0\cdot\underline{h}_t=\frac{1}{\eta_z}\left(\underline{z}_0\times\underline{e}_t\right)\cdot\underline{x}_0=-\frac{1}{\eta_z}\left(\underline{x}_0\times\underline{z}_0\right)\cdot\underline{e}_t=-\frac{1}{\eta_z}\underline{y}_0\cdot\underline{e}_t=-\frac{1}{\eta_z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

Quindi deve essere:

$$\frac{1}{\eta_z}\lim_{y\to b-}\frac{\partial\Psi''}{\partial x}=\frac{1}{\eta_z}\lim_{y\to b+}\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\qquad \text{per } x>a \text{ ed } x<-a$$

Questa equazione esaurisce le condizioni di continuità.

Si può però fare anche un'altra osservazione; la struttura considerata gode di una simmetria di riflessione rispetto all'asse y, quindi di tale simmetria dovranno godere anche i campi. Questo vuol dire che nei punti dell'asse y dovrà essere $\underline{e}_t \parallel \underline{y}_0$, cioè:

$$\nabla_t\Psi\cdot\underline{x}_0=0$$
$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

Quindi il problema può essere risolto solo nel primo quadrante del piano xy con questa ulteriore condizione. Se per dualità si definisce parete magnetica ideale una superficie su cui si debbano imporre le condizioni al contorno:

$$\underline{E}\cdot\underline{n}_0=0$$
$$\underline{H}\cdot\underline{t}_0=0$$

È chiaro che il piano yz costituisce una parete magnetica ideale (***PMI***).

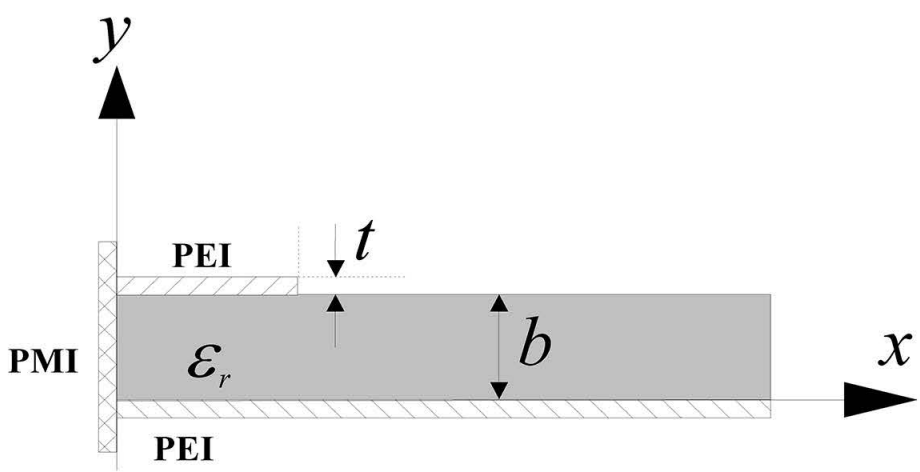


Figura 20.2 - Modello semplificato della microstriscia.

Dobbiamo ora integrare l'equazione di *Laplace* in due dimensioni con le condizioni al contorno scritte nel dominio piano in figura 20.2.

$$\nabla_t \Psi \cdot \underline{x}_0 = 0,$$

$$1)\ \left.\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$2)\ \left.\frac{1}{\eta_z}\frac{\partial \Psi''}{\partial y}\right|_{y=b-} = \left.\frac{1}{\eta_z}\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right|_{y=b+} = 0$$

$$3)\ \left.\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right|_{y=b-} = \left.\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right|_{y=b+} \quad x > 0$$

$$4)\ \begin{cases} \Psi = \Psi_1 & \text{per } y = b \quad \text{e } x \leq a \\ \Psi = \Psi_2 & \text{per } y = 0 \end{cases}$$

Questo è un problema matematicamente definito correttamente che ammette effettivamente soluzioni. L'approssimazione sarà poi considerare la funzione $\Psi(x, y)$ come un potenziale da cui poter ricavare un modo ***TEM*** che nella struttura considerata non esiste. Per risolvere tale problema adotteremo il metodo delle trasformazioni conformi. Tali trasformazioni hanno infatti la proprietà di lasciare invariata l'equazione di *Laplace*, cioè se

$$\nabla_t \Psi(x, y) = 0 (x, y) \in S$$

e se la trasformazione:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

è conforme e tale che $S \rightarrow S'$ allora:

$$\nabla_t \Psi(u, v) = 0 (u, v) \in S'$$

Cerchiamo allora una trasformazione conforme che trasformi il dominio che ci interessa in un dominio semplice sul piano (u, v). Indichiamo il contorno con i punti indicati in figura 20.3.

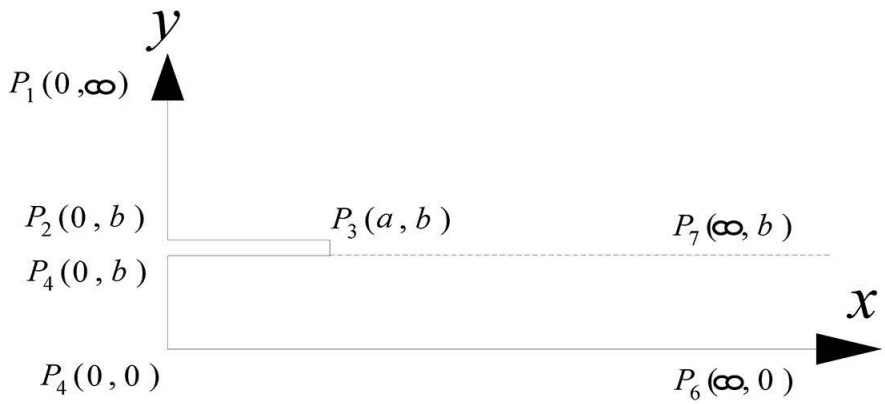


Figura 20.3 - Curva alla quale viene applicata la trasformazione conforme.

Il percorso P_2, P_3, P_4 va interpretato come un percorso nei due sensi sullo stesso segmento. Dotiamo il nostro contorno di un verso di percorrenza e applichiamo la trasformazione:

$$\boxed{z = jc + d\tanh\left(\frac{w}{2}\right) - w}$$

con c, d costanti reali positive,

$$z = x + jy$$
$$w = u + jv$$

Allora si possiamo scrivere che:

$$\boxed{x + jy = jc + d\tanh\left(\frac{u + jv}{2}\right) - u - jv}$$

sviluppando la $\tanh(a + b)$ si ottiene:

$$\boxed{x + jy = jc + d\frac{\tanh\left(\frac{u}{2}\right) + j\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{1 + j\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\tan\left(\frac{v}{2}\right)} - u - jv}$$

Studiamo ora come si trasforma il contorno che ci interessa. Il primo tratto è la semiretta dell'asse y che va da P_1 a P_2. L'asse y ha equazione $x = 0$, devo quindi porre:

$$Re\{f(w)\} = 0$$

tale equazione è soddisfatta per $u = 0$ infatti:

$$f(jv) = jc + jd\tan\left(\frac{v}{2}\right) - jv$$

inoltre, ponendo $y = \infty$ si trova $v = \pi$ per cui $P_1(0,\infty) \implies P_1'(0,\pi)$.

Ponendo y=b si trova:

$$b - c = d\tan\left(\frac{v}{2}\right) - v$$

se fissiamo la costante c (fino ad ora arbitraria) al valore b, l'equazione si risolve con $v = 0$ per cui:

$$P_2(0,b) \implies P_2'(0,0)$$

La semiretta tra P_1 e P_2 si trasforma nel piano u,v nel segmento P_4, P_5. Trasformiamo ora il segmento P_4, P_5 sempre appartenente all'asse y. L'equazione:

$$Re\{f(w)\} = 0$$

ammette anche un'altra soluzione oltre ad $u = 0$, infatti se immaginiamo d molto grande e supponiamo che in prima approssimazione u sia talmente grande che:

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) \cong 1$$

$$\frac{\tanh\left(\frac{u}{2}\right) + j\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{1 + j\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\tan\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{1 + j\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{1 + j\tan\left(\frac{v}{2}\right)} = 1$$

Per cui la trasformazione si può scrivere:

$$\begin{gathered} x + jy = jb + d - u - jv \\ x = d - u \\ y = b - v \end{gathered}$$

Allora si ottiene $x = 0$ per $d = u$. Poiché avevamo supposto d molto grande, ciò conferma l'ipotesi $\tanh(u/2) \cong 1$ e si può dire che nella nostra approssimazione il segmento P_4, P_5 si trasforma in un segmento della retta $u = d$. Trasformiamo ora i punti P_4 e P_5. Ponendo $y = b$ si ottiene $v = 0$ per cui:

$$P_4(0,b) \implies P_4'(d,0)$$

Ponendo $y = 0$ si ottiene $v = b$ per cui:

$$P_5(0,0) \implies P_5'(d,b)$$

È conveniente che P_5' abbia la stessa ordinata di P_1'. Ciò si può ottenere scegliendo sul piano xy quell'unità di misura che fa in modo che $b = \pi$, cioè se σ è l'unità di misura originaria, bisogna adottare sul piano xy un'unità di misura per le lunghezze

$$\sigma' = \frac{b}{\pi\sigma}$$

Allora il percorso $P_4\,P_5$ si trasforma nel percorso $P_4'\;P_5'$ sulla retta $u = d$. Il percorso $P_2\,P_3\,P_4$ si trasforma naturalmente nel segmento $P_2'\,P_4'$ di asse u, essendo P_3 trasformato in un punto intermedio.

Sostituendo $v = 0, x = a, y = b$ nella trasformazione si ottiene

$$a = d\tanh\left(\frac{u}{2}\right) - u$$

Se chiamiamo con $\hat{u}$ la soluzione di questa equazione (che per un fissato d si può ottenere numericamente) si ha:

$$P_3(a,b) \implies P_3'(\hat{u},0)$$

Bisogna notare che nella trasformazione rimangono inalterate anche le condizioni al contorno per cui il tratto appena trasformato va considerato come conduttore elettrico perfetto, mentre i tratti $P_1'\,P_2'$ e $P_4'\,P_3'$ sono da considerare come pareti magnetiche perfette. Trasformiamo ora il tratto $P_4\,P_6$ che è una parete ***PEI***.

Dato che il piano $x - jy$ è dotato di un solo punto all'infinito che quindi nel piano trasformato ha un solo punto immagine si ha che:

$$P_6(\infty,0) \implies P_6'(0,\pi)$$

Il tratto considerato si trasforma nel segmento $P_5'\,P_1'$ sulla retta $v = \pi$. In conclusione, la struttura che si ottiene sul piano uv è quella in figura 20.4, che è un condensatore chiuso lateralmente con PMI e contenente un dielettrico non omogeneo.

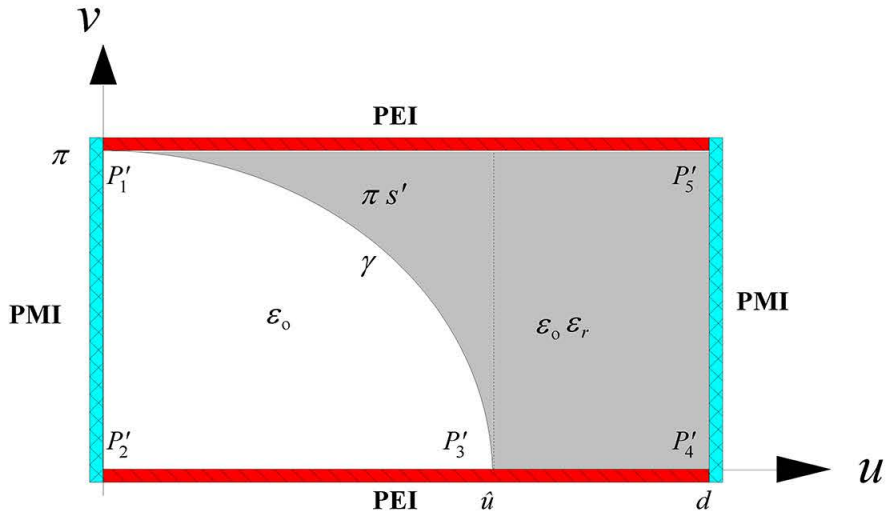


Figura 20.4 - Struttura a doppio condensatore.

Resta ora da trovare come si trasforma l'interfaccia tra i due dielettrici, cioè la semiretta $P_3\,P_7$ sulla retta $y = b$. Questa semiretta non si trasforma in maniera semplice, ma dà luogo sul piano uv ad una curva che va dal punto P_3' al punto P_7, contenuta completamente nella struttura a facce piane. Le equazioni parametriche si ottengono dalla relazione:

$$x + jb = f(w)\; x \;\geq a$$

Ponendo

$$\begin{cases} Re\{f(u,v)\} = x \\ Im\{f(u,v)\} = b \end{cases} \qquad x \geq a$$

Il problema ora è quello di risolvere l'equazione di *Laplace*:

$$\nabla_t^2 \Psi = 0$$

con le condizioni al contorno:

$$1)\quad \left.\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$2)\quad \left.\frac{1}{\eta_z}\frac{\partial \Psi''}{\partial y}\right|_{y=b-} = \left.\frac{1}{\eta_z}\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right|_{y=b+} \qquad x > a$$

$$3)\quad \left.\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right|_{y=b-} = \left.\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right|_{y=b+} \qquad x > a$$

$$4)\quad \begin{cases} \Psi = \Psi_1 & \text{per } y = b \quad \text{e } x \leq a \\ \Psi = \Psi_2 & \text{per } y = 0 \end{cases}$$

Che divengono:

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right|_{u=d} = 0$$
$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right|_{v=0} = \left.\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right|_{v=\pi} = 0$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad \text{continue lungo } \gamma$$

(γ e la superficie di separazione aria-dielettrico)

Dato che la trasformazione è conforme si conservano gli angoli tra le superfici, le normali e le tangenti si mutano in n e t. Il problema è molto complicato per cui si esamina solo una sua soluzione di prima approssimazione mostrata in figura 20.5.

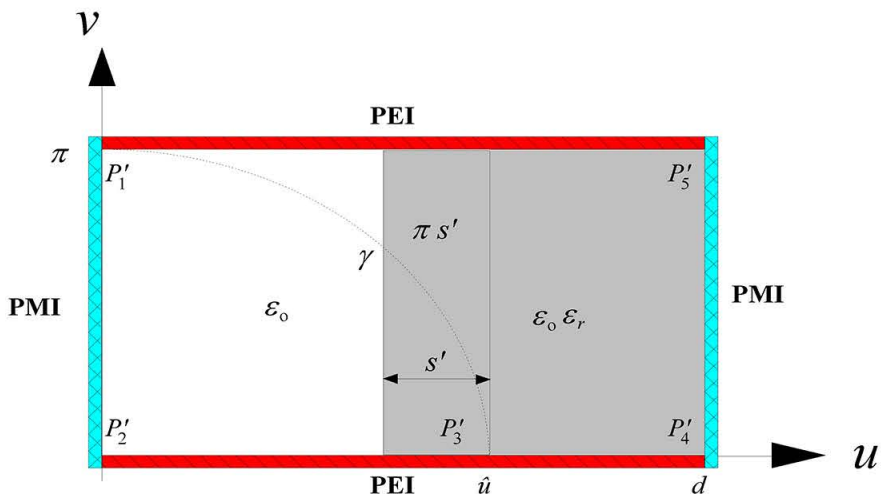


Figura 20.5 - Prima approssimazione della struttura.

La struttura alla destra della retta $u = \hat{u}$ è una struttura nota in elettrostatica come un condensatore piano con dielettrico omogeneo. Più complicata è invece la struttura alla sinistra della retta $u = \hat{u}$ che ha un dielettrico non omogeneo. Chiamiamo con $\pi s'$ l'area del dielettrico per $u < \hat{u}$. Una prima approssimazione potrebbe essere quella di riempire di dielettrico la struttura fino a $\hat{u} - s'$ e lasciare vuoto il resto. Un'approssimazione meno grossolana consiste nello scegliere un segmento s'' in modo che il rettangolo di base s'' ed altezza π sia occupato quasi totalmente (Es. 90%) dal dielettrico.

L'area di dielettrico rimanente, che sarà $\pi s' - \pi s'' = \pi(s' - s'')$ viene posta sotto la parete ***PEI*** superiore come in figura 20.6.

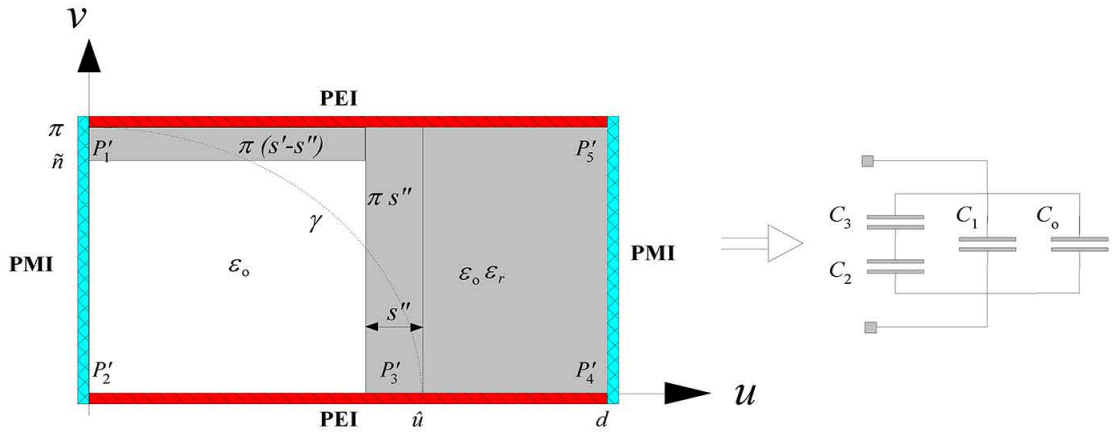


Figura 20.6 - Seconda approssimazione della struttura.

L'ordinata $\tilde{n}$ può essere calcolata semplicemente come:

$$(\pi - \tilde{n})(\hat{u} - s'') = \pi(s' - s'') \Longrightarrow (\pi - \tilde{n}) = \frac{\pi(s' - s'')}{(\hat{u} - s'')}$$

Anche se questa risulta essere sempre un'approssimazione grossolana ai fini del calcolo del campo nella struttura, può fornire una stima attendibile delle grandezze globali relative alla nostra struttura. Una di queste grandezze, legata a problemi statici di questo tipo, è la capacità del sistema complessivo. La parte per $u > \hat{u}$ è un semplice condensatore piano di capacità (per unità di lunghezza):

$$C = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \frac{(d - \hat{u})}{\pi}$$

In base alla seconda approssimazione la zona $u < \hat{u}$ può essere vista come la combinazione di tre condensatori sistemati secondo lo schema illustrato in figura 20.6.

Calcoliamo le capacità:

$$\begin{cases} C_1 = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \dfrac{s''}{\pi} \\ C_2 = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \dfrac{(\hat{u} - s'')}{(\pi - \tilde{n})} = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \dfrac{(\hat{u} - s'')^2}{\pi(s' - s'')} \\ C_3 = \varepsilon_0 \dfrac{(\hat{u} - s'')}{\tilde{n}} = \varepsilon_0 \dfrac{(\hat{u} - s'')^2}{\pi(\hat{u} - s')} \end{cases}$$

La capacità totale sarà pertanto:

$$C_1 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1 = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}{C_2 + C_3}$$

Conviene a questo punto cercare di ridurre la struttura a tre condensatori in una a due come illustrato in figura 20.7 in cui $C_p = C' + C''$.

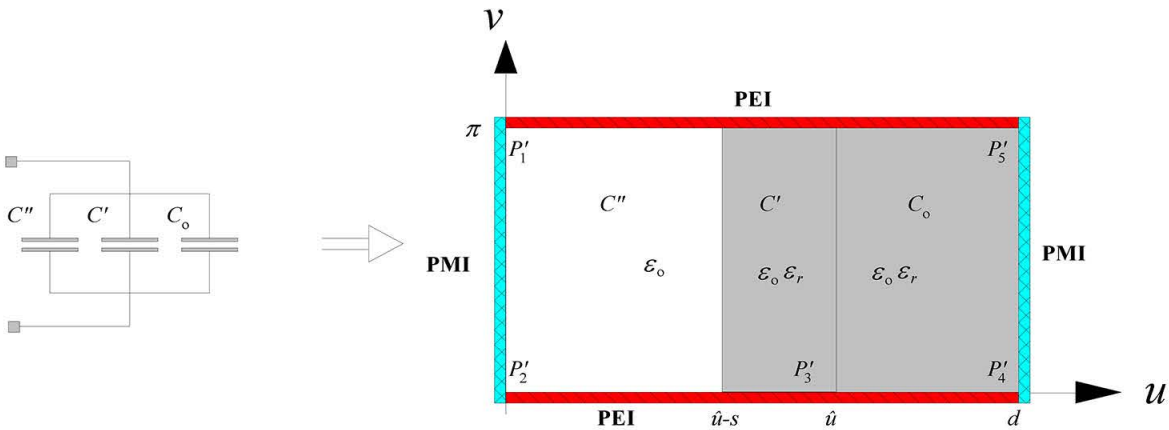


Figura 20.7 - Struttura finale a tre condensatori.

Le capacità equivalenti possono trovarsi semplicemente ponendo:

$$C_p = C_t$$

$$\frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}{C_2 + C_3} = C' + C''$$

Se pongo $C'' = C_3$ allora:

$$C' = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 - C_3^2}{C_2 + C_3}$$

Questa capacità è in generale una funzione delle variabili $\hat{u}, s', s'', \varepsilon_r$. Se facciamo l'ipotesi che $\hat{u} \gg s'$ l'espressione si semplifica in:

$$C' = \varepsilon_r\, \varepsilon_0 \frac{s}{\pi} \qquad dove \quad s = s'' + \frac{(s' - s'')}{\varepsilon_r}$$

Questa ipotesi è effettivamente rispettata nel limite in cui d è molto grande, come abbiamo supposto fin dall'inizio. La capacità totale della struttura sarà la somma delle tre capacità:

$$C_{tot} = \varepsilon_0 \frac{(\hat{u} - s)}{\pi} + \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{(d - \hat{u} + s)}{\pi} = \varepsilon_0 \frac{d}{\pi}\left[\frac{(\hat{u} - s)}{\pi} + \varepsilon_r\left(1 - \frac{(\hat{u} - s)}{d}\right)\right]$$

Ma se chiamiamo con C_0 la capacità della struttura senza dielettrico si ha:

$$C_{tot} = C_0\left[\frac{(\hat{u} - s)}{\pi} + \varepsilon_r\left(1 - \frac{(\hat{u} - s)}{d}\right)\right]$$

Se chiamiamo con q il *fattore di riempimento* della struttura:

$$q = \left(1 - \frac{(\hat{u} - s)}{d}\right)$$

Si può definire una costante dielettrica efficace:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + (\varepsilon_r - 1)q$$

per cui la capacità totale si scrive come:

$$C_{tot} = C_0\, C_{eff}$$

Ai fini della capacità, in prima approssimazione il sistema si comporta come se fosse immerso in un dielettrico di costante relativa ε_{eff}. Allora estendendo questa proprietà possiamo dire che ai fini globali, la struttura, si comporta in questo modo, il che ci permette di calcolare le grandezze globali della microstriscia.

Ad esempio la costante di propagazione:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff} \mu_0}$$

Un altro parametro di importanza per lo studio delle microstrisce è l'impedenza caratteristica della linea

$$Z_m = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Se la struttura è senza perdite (conduttori e dielettrici perfetti) allora $R = 0$ e $G = 0$ per cui

$$Z_m = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Possiamo a questo punto supporre che nella struttura venga tolto il dielettrico. In questo modo la struttura è immersa in un dielettrico omogeneo quale il vuoto (o aria), per cui è semplice calcolare l'impedenza caratteristica della linea che coincide con l'impedenza d'onda della linea (infatti in questo caso il modo di propagazione è ***TEM***)

$$Z_m = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377\Omega$$

L'inserimento del dielettrico nella struttura non comporta grandi variazioni nel valore dell'induttanza (dato che i dielettrici usati hanno una permeabilità magnetica pressoché uguale a quella del vuoto) per cui possiamo supporre che $L = L_0$. Il rapporto delle impedenze relative ai due casi è:

$$\frac{Z_m}{Z_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C_{tot}}}$$

Ma abbiamo visto che $C_{tot} = C_0 \varepsilon_{eff}$ per cui:

$$Z_m = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}}}$$

Vediamo il motivo per cui $L \cong L_0$. L'induttanza è strettamente legata all'energia immagazzinata nel campo magnetico, la cui densità mediata in un periodo è:

$$w_m = \frac{\mu}{4} \underline{H} \cdot \underline{H}^*$$

A questo punto può assumersi $\mu \cong \mu_0$ cioè la permeabilità del dielettrico prossima a quella del vuoto, ne consegue che l'energia immagazzinata non dipende dalla presenza o meno del dielettrico. Il teorema della circuitazione permette di affermare che il campo magnetico $\underline{H}$ dipende solo dalla corrente che scorre nei conduttori:

$$J = \int_S \underline{H}\, \underline{t}_0 \, dt$$

Queste approssimazioni hanno tutte come presupposto l'idealità dei materiali di cui è composta la microstriscia. Lo studio delle perdite nella struttura reale è complicato dal fatto che anche in assenza di imperfezioni nei materiali, il campo non è limitato ad un dominio finito ma si irradia in tutto lo spazio.

21 LINEE DI TRASMISSIONE

Consideriamo una linea di trasmissione alimentata da un generatore e chiusa su un carico. Supponiamo di lavorare in regime sinusoidale permanente (è nota quindi la pulsazione $\omega\ Rad/sec$ del generatore) e che la linea sia priva di perdite $R = 0, G = 0$.

La linea è nota quando sono assegnati i seguenti parametri:

- Lunghezza $l\ (m)$
- Parametri primari $L\ (H/m), C\ (F/m)$
- o i Parametri secondari $\begin{cases} Z_0 (\text{Impedenza caratteristica in } Ohm) \\ \beta\ (\text{costante di fase in } Rad/m) \end{cases}$

Tra i parametri primari e secondari esistono le seguenti relazioni:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

Altre grandezze che verranno usate sono:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{\lambda}{T}\ [m/s], & velocità\ di\ fase \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}\ [m], & lughezza\ d'onda \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}[s], & periodo \end{cases}$$

Nell'aria, come nel vuoto, per una linea bifilare L e C non sono altro che ε_0 e μ_0 per cui:

$$\lambda_0 = \frac{T}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{f}$$

dove c_0 è la velocità della luce nel vuoto ($3 \cdot 10^8\ m/s$).

Esprimendo f in MHz si ha la formula pratica:

$$\lambda_0 = \frac{300}{f(MHz)}[m]$$

Per altri dielettrici, dato che in generale $\mu_r \cong 1$, varia la sola costante dielettrica, che diviene $\varepsilon\ = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$, per cui:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\varepsilon_r}$$

Quindi una linea di trasmissione in cavo coassiale riempita per esempio di teflon ($\varepsilon_r = 2.1$) ha, alla frequenza di $100\,MHz$, una lunghezza d'onda di $2.07\,m$. In ogni sezione della linea i fasori della tensione e della corrente variano in funzione del carico e della distanza da esso. In generale il riferimento si prende con l'origine sul carico e orientato verso il generatore:

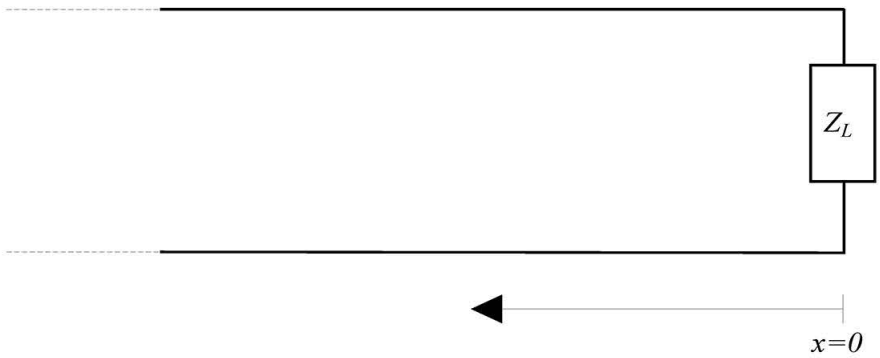


Figura 21.1 - Riferimento su linee a microonde.

È conveniente scindere la tensione simbolica $V(x)$ in una generica sezione, in due componenti:

$$V(x) = V_i(x) + V_r(x)$$

$V_i(x)$ si chiama onda incidente di tensione, mentre $V_r(x)$ si chiama onda riflessa di tensione. Analogamente si può fare per la corrente simbolica $I(x)$:

$$I(x) = I_i(x) - I_r(x)$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$Z_0 = \frac{V_i(x)}{I_i(x)}$$
$$Z_0 = -\frac{V_r(x)}{I_r(x)}$$

Muovendosi dal carico verso il generatore le onde di tensione variano secondo la seguente legge:

$$V_i(x) = V_{Li}\, e^{j\beta x}$$
$$V_r(x) = V_{Lr}\, e^{-j\beta x}$$

Da notare che $V_i(x)$ è l'onda che proviene dal generatore e che incide sul carico, mentre $V_r(x)$ è l'onda che viene riflessa dal carico verso il generatore. Le costanti V_{Li}

e V_{Lr} sono i valori della tensione assunti sul carico. Si chiama coefficiente di riflessione nella generica sezione x il rapporto:

$$\Gamma(x) = \frac{V_r(x)}{V_i(x)} = \frac{V_{Li}}{V_{Lr}} e^{-j2\beta x} = \Gamma_L e^{-j2\beta x}$$

Dove Γ_L è il coefficiente di riflessione sul carico ed è in genere un numero complesso, per cui la sua rappresentazione in funzione del modulo e fase è:

$$\Gamma_L = \delta e^{j\theta}$$

Dalla formula scritta si vede che per una linea priva di perdite il modulo del coefficiente di riflessione è costante in ogni sezione ed è uguale al valore assunto sul carico, per cui la parte che varia con la distanza è solo la fase:

$$\theta(x) = \theta - 2\beta x = \theta - \frac{4\pi x}{\lambda}$$

La fase è periodica in quanto lo è l'esponenziale complesso infatti:

$$\frac{4\pi x}{\lambda} = 2n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{n\lambda}{2}, \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

Quindi il coefficiente di riflessione è periodico con periodo pari a $\lambda/2$. Il coefficiente di riflessione sul carico si calcola, nota l'impedenza di ingresso, con la formula:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_{Ln} - 1}{Z_{Ln} + 1}$$

Dividendo nominatore e denominatore per Z_0 si ottiene un coefficiente di riflessione al carico in cui compare un'impedenza del carico normalizzata all'impedenza caratteristica della linea $Z_{Ln} = Z_L/Z_0$. Il modulo del coefficiente di riflessione varia tra i valori:

$$0 \leq \delta \leq 1$$

Quando il modulo $\delta = 0$ vuol dire che $\Gamma_L = 0$ da cui deriva che $Z_L = Z_0$ per cui $\Gamma(x)$ è nullo lungo tutta la linea. Questa condizione, a cui si cerca di avvicinarsi in pratica, viene chiamata condizione di adattamento e rappresenta il caso in cui il carico non riflette l'energia che proviene dal generatore.

I casi in cui $\delta = 1$ sono diversi:

$$Z_L, \quad immaginario\ puro$$
$$Z_L = 0, \quad cortocircuito \quad \Rightarrow \quad \Gamma_L = -1$$
$$Z_L = \infty, \quad circuito\ aperto \quad \Rightarrow \quad \Gamma_L = 1$$

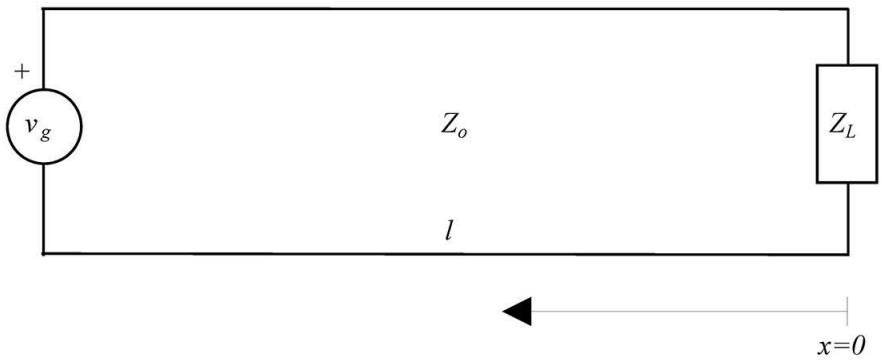


Figura 21.2 - Andamento della tensione su una linea.

$$V(x) = V_{Li}\, e^{j\beta x} + V_{Lr}\, e^{-j\beta x}$$
$$I(x) = \frac{V_{Li}\, e^{j\beta x} - V_{Lr}\, e^{-j\beta x}}{Z_0}$$

Dalla condizione di chiusura sul generatore si ottiene:

$$V(l) = v_g = V_{Li}\, e^{j\beta l} + V_{Lr}\, e^{-j\beta l}$$

Mentre dalle condizioni di chiusura sul carico si ottiene:

$$V(0) = V_{Li} + V_{Lr} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{Z_L(V_{Li} - V_{Lr})}{Z_0}$$

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni precedenti rispetto alle costanti V_{Li} e V_{Lr} utilizzando anche l'espressione del coefficiente di riflessione sul carico Γ_L si ottiene:

$$V_{Li} = \frac{v_g e^{-j\beta x}}{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta x}}$$

Per cui inserendo le costanti trovate nell'espressione di $V(x)$:

$$V(x) = \frac{v_g e^{-j\beta l}}{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta l}} \left[e^{j\beta l} + \Gamma_L e^{j\beta l}\right]$$

Impedenza di ingresso di una linea di lunghezza l

$$I(l) = \frac{V_{Li}}{Z_0} \left[e^{j\beta l} - \Gamma_L\, e^{-j\beta l}\right]$$
$$V(l) = V_{Li}\left[e^{j\beta l} + \Gamma_L\, e^{-j\beta l}\right]$$

$$\boxed{Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = Z_0 \frac{e^{j\beta l} + \Gamma_L\, e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \Gamma_L\, e^{-j\beta l}}}$$

21.1 Onde Stazionarie

Dalla formula precedente della tensione esplicitando il coefficiente di riflessione sul carico in funzione del suo modulo e fase si ottiene:

$$V(x) = V_a\left[1 + \Gamma_L\, e^{-j2\beta x}\right] = V_a\left[1 + \delta\, e^{j(\theta - 2\beta x)}\right]$$

Si può osservare che al variare di $x, |V(x)|$ assume valori compresi tra $|V_a|\,(1-\delta)$ ed $|V_a|\,(1+\delta)$. Il primo si ha quando $\theta - 2\beta x = (2k+1)\pi$, il secondo quando $\theta - 2\beta x = 2k\pi$ con $k = 0,1,2,\ldots$ Il significato fisico di questo risultato è legato alla potenza attiva che transita sulla linea.

Se $\delta = 0$ (linea adattata) si ha la sola onda incidente e transito di potenza attiva che è assorbita dal carico.

Se esiste onda riflessa ($\delta \neq 0$ linea disadattata) diminuisce la potenza attiva che attraverso la linea è assorbita dal carico e nel caso limite in cui $\delta = 1$ non si ha transito di potenza attiva sulla linea.

Dato che la potenza attiva è legata al quadrato del modulo della tensione le tre situazioni di lavoro sono:

$\delta = 1$ Transito di potenza attiva $|V(x)|^2 = cost.$

$0 < \delta < 1$ La potenza attiva che transita da sinistra verso destra è pari alla differenza tra la potenza trasportata dall'onda incidente e la potenza trasportata dall'onda riflessa.

$\delta = 1$ In questo caso limite tutta la potenza viene riflessa dal carico per cui in una generica sezione non si ha transito di potenza attiva.

Il valore minimo e massimo che $|V(x)|$ può assumere prendono il nome di:

$$V_{min} = |V_a|(1-\delta)$$
$$V_{max} = |V_a|(1+\delta)$$

Si definisce in tal modo il rapporto di onda stazionario (ROS)

$$\boxed{ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{(1+\delta)}{(1-\delta)}}$$

21.2 Potenza Transitante

La potenza complessa che transita in una sezione della linea priva di perdite può essere espressa dalle onde incidente e riflessa. Ricordando le espressioni della tensione e della corrente lungo la linea:

$$V(x) = V_i\, e^{j\beta x} + V_r\, e^{-j\beta x}$$
$$I(x) = \frac{V_i\, e^{j\beta x} - V_r\, e^{-j\beta x}}{R_0}$$

Dove l'impedenza caratteristica della linea viene supposta di tipo puramente resistivo. La potenza complessa che transita nella generica sezione è:

$$P(x) = \frac{V(x)I^*(x)}{2} = \frac{\left(V_i\, e^{j\beta x} + V_r\, e^{-j\beta x}\right)\left(V_i^*\, e^{-j\beta x} - V_r^*\, e^{j\beta x}\right)}{2R_0}$$
$$= \frac{|V_i|^2}{2R_0} - \frac{|V_r|^2}{2R_0} + j\, Im\left\{\frac{V_r V_i^*\, e^{j2\beta x}}{2R_0}\right\}$$

La potenza attiva è la parte reale della potenza complessa per cui:

$$P_{att} = \frac{|V_i|^2}{2R_0} - \frac{|V_r|^2}{2R_0}$$

Da questa relazione risulta chiaro come la potenza attiva transitante attraverso la generica sezione (verso il carico) di una linea senza perdite coincide con la differenza della potenza attiva trasportata dall'onda incidente e quella trasportata dall'onda riflessa.

21.3 Carta Di Smith

La carta di Smith è un ausilio grafico per determinare i valori dell'impedenza o ammettenza normalizzata. Ricordiamo che il coefficiente di riflessione in una generica sezione della linea è:

$$\Gamma(x) = \Gamma_L\; e^{-j2\beta x} \quad con \quad \Gamma_L = \delta\, e^{j\theta}$$

Uno spostamento lungo la linea, nel piano del coefficiente di riflessione, è equivalente ad un movimento su una circonferenza dato che il modulo del coefficiente di riflessione non varia con la sezione x. Tutti i punti rappresentativi di $\Gamma(x)$ devono giacere all'interno di una circonferenza di raggio unitario (dato che il massimo valore del modulo δ è 1). La carta è costruita in modo che siano immediatamente ricavabili i valori delle impedenze normalizzate:

$$Z_n = R_n + jX_n$$

Sappiamo già che se l'impedenza $Z_n = jX_n$, il modulo del coefficiente di riflessione è 1, per cui il cerchio esterno è il luogo dei punti in cui $R_n = 0$.

Se $Z_n = R_n$ il coefficiente di riflessione è puramente reale con valori positivi se $R_n > 1$, negativi se $R_n < 1$. Il luogo dei punti in cui $X_n = 0$ è il diametro del cerchio, asse reale del piano del coefficiente di riflessione. Il punto che è stato indicato con lo zero e che è una intersezione tra il cerchio ed il diametro, corrisponde, per l'impedenza normalizzata, ad un coefficiente di riflessione $\Gamma = -1$. Il punto indicato con ∞ (circuito aperto) equivale a $\Gamma = 1$.

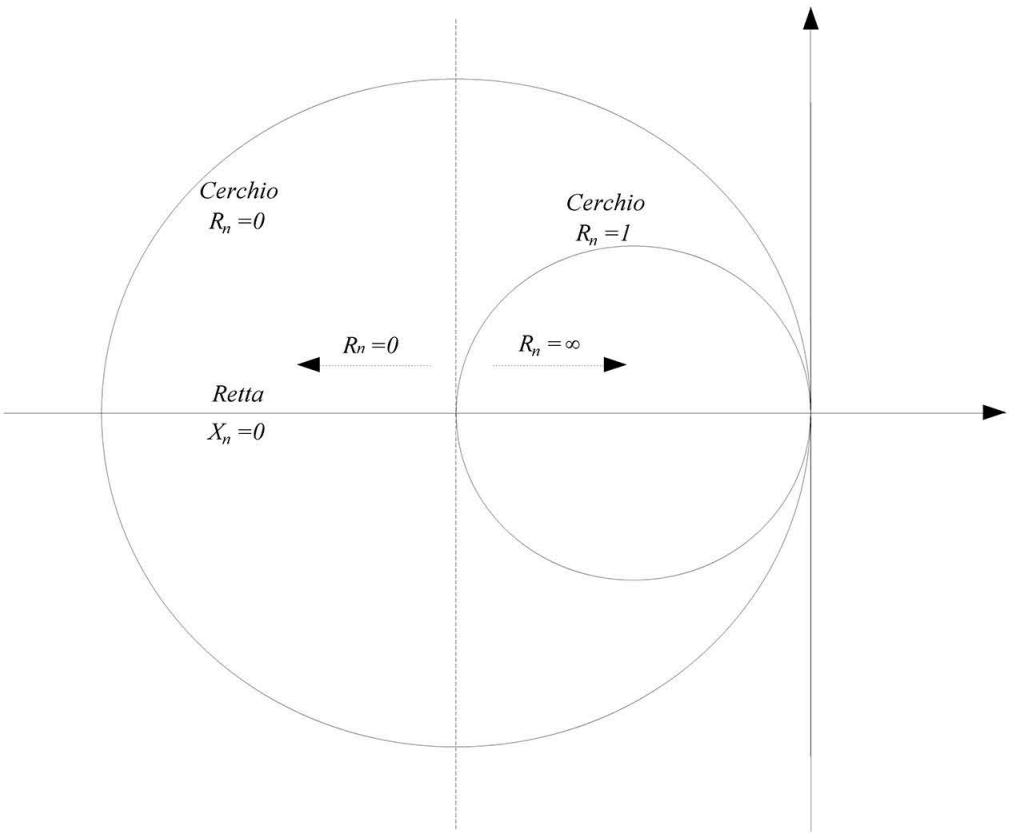


Figura 21.3 - Carta di Smith.

Le altre curve rappresentate sulla carta sono i luoghi dei punti in cui in cui $R_n = cost.$ e $X_n = cost.$ Il più importante tra tutti è il cerchio $R_n = 1$, passante per l'origine del piano del coefficiente di riflessione (punto di adattamento).

21.4 ESEMPIO

Trovare il punto rappresentativo sulla carta di *Smith* dell'impedenza:

$$Z_L = 40 + j15 \quad con \quad Z_0 = 50\Omega$$

L'impedenza normalizzata è $Z_{Ln} = Z_L/Z_0 = 0.8 + j0.3$. Il punto Sulla carta è l'intersezione del cerchio R_n=0.8 con il cerchio $X_n = 0.3$. Trovare l'impedenza alla distanza di $1m$ dal carico alla frequenza di $120MHz$. Spostandosi lungo la linea di carico equivale a spostarsi lungo il cerchio di raggio δ con centro nell'origine. Quando ci si sposta dal carico verso il generatore (x crescenti) la fase del coefficiente di riflessione diventa sempre più negativa ($-4\pi x/\lambda$) e quindi ci si muove sulla carta in senso orario.

$$\lambda = \frac{300}{120} = 2.5\ m$$

Ci si deve spostare di 1/2.5 frazioni di λ ossia di 0.4 (più di 180°) in senso orario. Il nuovo punto è:

$$Z_n = 1.28 + j\ 0.38 \quad \Longrightarrow \quad Z = 64 + j19$$

Il rapporto di onda stazionaria relativo al carico assegnato vale 1.5 come si legge all'intersezione del cerchio $\delta = cost$ con l'asse reale dalla parte dell'infinito. Spesso invece di rappresentare sulla carta le impedenze normalizzate conviene rappresentare le ammettenze normalizzate ossia:

$$Y_n = \frac{Y}{Y_o} \quad \Longrightarrow \quad Y_o = \frac{1}{Z_o}$$

Dalla definizione di coefficiente di riflessione si ha:

$$\Gamma = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = -\frac{Y_n - 1}{Y_n + 1}$$

Dall'ultima formula si vede che la stessa carta di *Smith* con gli stessi numeri, può essere utilizzata per rappresentare anche le ammettenze normalizzate, cambiando i significati dei punti.

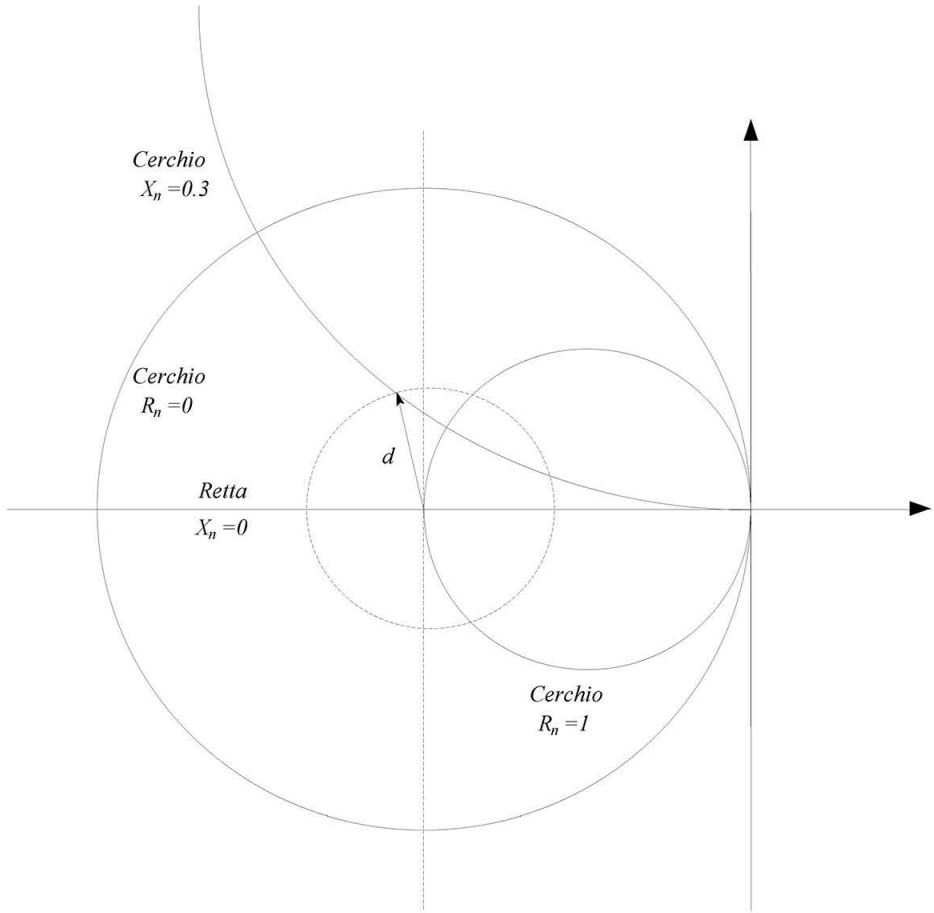


Figura 21.4 - Carta di Smith.

Il piano in cui si opera non è quello del coefficiente di riflessione, ma è sfasato di 180° rispetto ad esso per tenere conto del segno negativo della formula. Ad esempio, il punto ∞ della carta rappresenta ora il cortocircuito, sappiamo che per un cortocircuito $\Gamma = -1$, mentre il punto ∞ sulla carta corrisponde a $\Gamma = +1$, perciò mentre i numeri della parte reale e parte immaginaria scritti sulla carta vanno interpretati come parte reale e parte immaginaria dell'ammettenza normalizzata, la fase (rispetto al semiasse reale del piano) del punto rappresentativo non coincide con la fase del coefficiente di riflessione (occorre aggiungere 180°).

21.5 Trasformatore in Quarto d'Onda

Si è visto come spostandosi sul cerchio del modulo del coefficiente di riflessione di un angolo di 180° è equivalente a spostarsi sulla linea di $\lambda/4$. Si può verificare sulla carta di Smith che punti a 180° fra di loro rispetto al centro della carta hanno valori reciproci, risultato che si può ricavare anche ricordando l'espressione dell'impedenza di ingresso di una linea chiusa su un carico Z_c:

$$\frac{Z_i}{Z_0} = \frac{Z_c \cos(\beta l) + jZ_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + jZ_c \sin(\beta l)} \qquad con \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Se

$$l = \frac{\lambda}{4} \quad \Longrightarrow \quad \beta l = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

quindi:

$$Z_{ni} = \frac{Z_i}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_c} = \frac{1}{Z_{nc}}$$

In conclusione; una linea di impedenza caratteristica Z_0 e di lunghezza $l = \lambda/4$ chiusa su un carico Z_c presente in ingresso un'impedenza uguale al reciproco dell'impedenza di carico. Un tronco di linea lungo $\lambda/4$ si chiama trasformatore in quarto d'onda per questa sua capacità di invertire l'impedenza normalizzata. I trasformatori in quarto d'onda sono soprattutto usati come tratti intermedi per adattare tra loro due linee di differente impedenza caratteristica.

Il principio di funzionamento è facilmente comprensibile se esaminiamo la seguente situazione operativa:

se ho una linea di impedenza caratteristica R_1 e voglio collegarla ad un carico puramente resistivo $R_L \neq R_1$ senza che si abbiano riflessioni nella sezione finale della linea, devo effettuare il collegamento tramite una linea lunga $\lambda/4$ e di impedenza caratteristica R_2.

Devo ora determinare R_2 in modo tale che nella sezione finale della prima linea si veda (guardando verso il carico) un'impedenza pari a R_1.

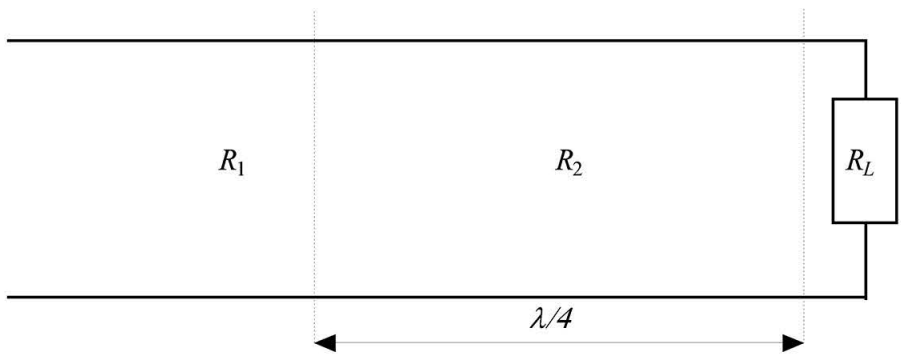


Figura 21.5 - Tratto di linea a λ/4.

Ossia $Z_i = R_1$ per la linea lunga $\lambda/4$ e chiusa su R_L. Usiamo la stessa espressione per l'impedenza d'ingresso della linea lunga $\lambda/4$ vista in precedenza:

$$R_i = R_2 \frac{R_L \cos(\beta l) + jR_2 \sin(\beta l)}{R_2 \cos(\beta l) + jR_L \sin(\beta l)} = \frac{R_2^2}{R_L}$$

Dato che Z_i deve essere uguale a R_1 (condizione di adattamento):

$$R_1 = \frac{R_2^2}{R_L} \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \sqrt{R_1 R_L}$$

naturalmente l'adattamento si ha solo per frequenze per cui il tronco di linea, d'impedenza caratteristica R_2, è lungo $\lambda/4$ (oppure $n\lambda/2 + \lambda/4$). Si ricorda infatti che:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{LC}} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

e quindi per una data linea, con costanti primarie L, C, l'impedenza dipende dalla frequenza f.

21.6 Uso della Carta di Smith per l'Adattamento

La trasmissione di energia, mediante una linea, è più efficiente se l'onda riflessa non è presente come già abbiamo visto quando abbiamo parlato di onde stazionarie. Naturalmente, tuttavia, l'impedenza di carico è diversa dall'impedenza caratteristica della linea per cui è presente l'onda riflessa.

Nel caso di carico puramente resistivo si è già detto che l'adattamento, ossia la condizione impedenza di carico uguale all'impedenza caratteristica, si può realizzare con un tronco di linea lungo $\lambda/4$ e di opportuna impedenza caratteristica.

Vediamo ora come è possibile ottenere l'adattamento di carichi qualsiasi tramite l'uso di tronchi di linea chiusi in corto circuito chiamati *Stub*. Prima di procedere si ricorda che una linea in corto circuito presenta in ingresso un'impedenza immaginaria pura che varia con la lunghezza della linea, ma rimane sempre immaginaria, infatti:

$$Z_i = R_0 \frac{j \sin(\beta l)}{\cos(\beta l)} = jR_0 \tan(\beta l)$$

con valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Rappresentiamo uno *Stub* sulla carta di *Smith* delle ammettenze: il punto rappresentativo del carico, ossia il corto circuito, è quello corrispondente all'intersezione del cerchio unitario con l'ascissa (punto a destra). I

punti rappresentativi delle altre sezioni man mano che mi muovo verso la sezione iniziale, si trovano tutti sul cerchio esterno di raggio 1 percorrendolo in senso orario.

Situazione operativa:

linea uniforme priva di perdite, di parametri L, C noti $G_0 = \sqrt{C/L}$, alimentata in ingresso da un generatore di tipo sinusoidale con pulsazione ω nota e chiusa su un carico di ammettenza Y. Si vuole fare in modo che non torni onda riflessa sul generatore.

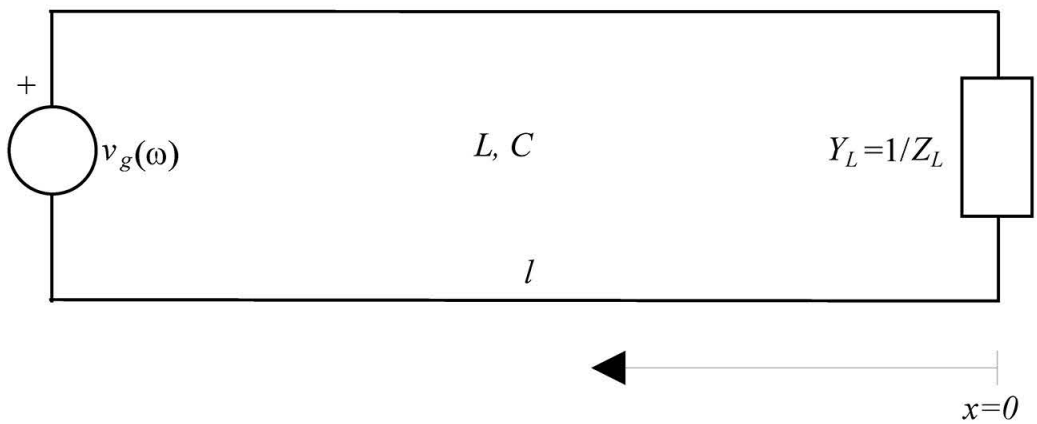


Figura 21.6 - Tratto di linea priva di perdite.

Per prima cosa normalizziamo l'ammettenza di carico all'ammettenza caratteristica della linea:

$$\frac{Y}{G_0} = G_n + jB_n = Y_n$$

Affinché non torni onda riflessa occorre che esista una sezione sulla linea in cui l'ammettenza normalizzata sia solo reale e valga 1. All'intersezione delle circonferenze G_n e B_n c'è il punto rappresentativo del carico Y_n. Per questo si traccia il cerchio del modulo del coefficiente di riflessione del carico a partire da tale punto. Muovendosi lungo tale circonferenza in senso orario, interseco il cerchio parte reale uguale ad 1.

L'angolo di cui mi sono mosso mi fornisce la distanza (in frazioni di λ) dal carico (ϕ_2).

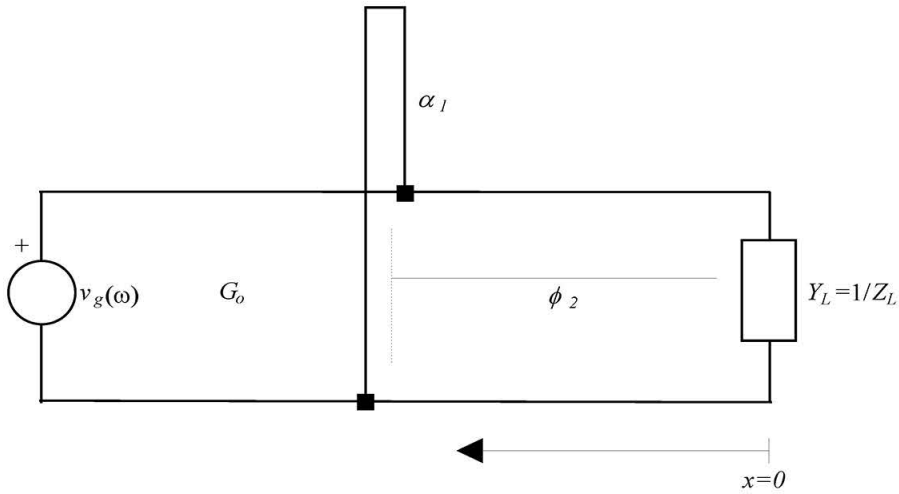


Figura 21.7 - Tratto di linea con singolo Stub.

Nel punto trovato comunque la parte immaginaria dell'impedenza normalizzata vale una certa quantità diversa da zero che chiamiamo B_n; affinché in questa sezione ci sia l'adattamento devo fare in modo che la parte immaginaria sia nulla, per cui devo inserire in parallelo alla linea una ammettenza di valore $-jB_nG_0$. A questo scopo mi servo di uno Stub di opportuna lunghezza.

Se realizzo lo Stub con un tratto della linea stessa (per cui l'impedenza caratteristica è G_0), posso lavorare sulla stessa carta di *Smith*. Lo Stub deve avere un'ammettenza normalizzata pari a $-jB_n$, il suo punto rappresentativo giace quindi sull'intersezione del cerchio $-B_n$ con il cerchio esterno. Dato che il punto rappresentativo del cortocircuito è il punto ∞, la lunghezza dello Stub è quella corrispondente all'angolo che tale punto forma con l'ascissa (α_1)

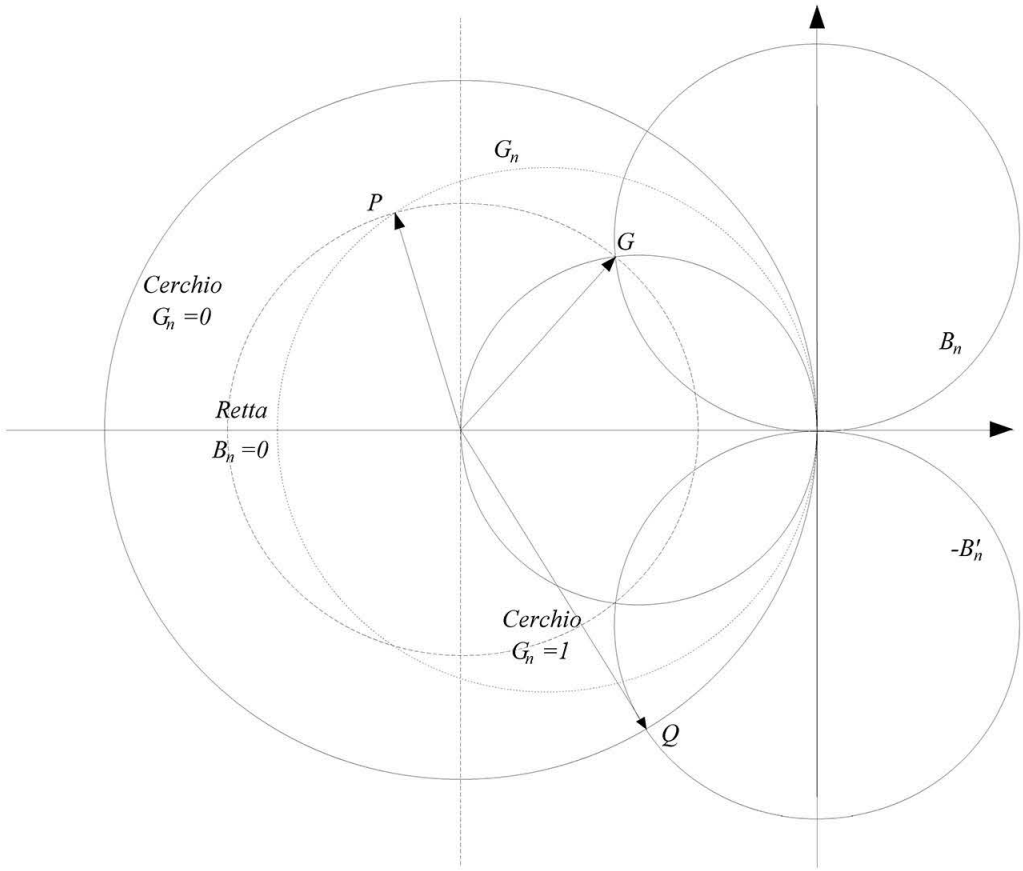


Figura 21.8 - Carta di Smith.

21.7 Doppio Stub

Uno svantaggio nell'uso di un solo Stub per adattare la linea è che ogni carico richiede una diversa posizione dello Stub. L'uso di due Stub posti uno sul carico ed uno a $\lambda/4$ dal carico e di opportuna lunghezza permette di evitare questo svantaggio, ma non consente di adattare tutti i tipi di carico.

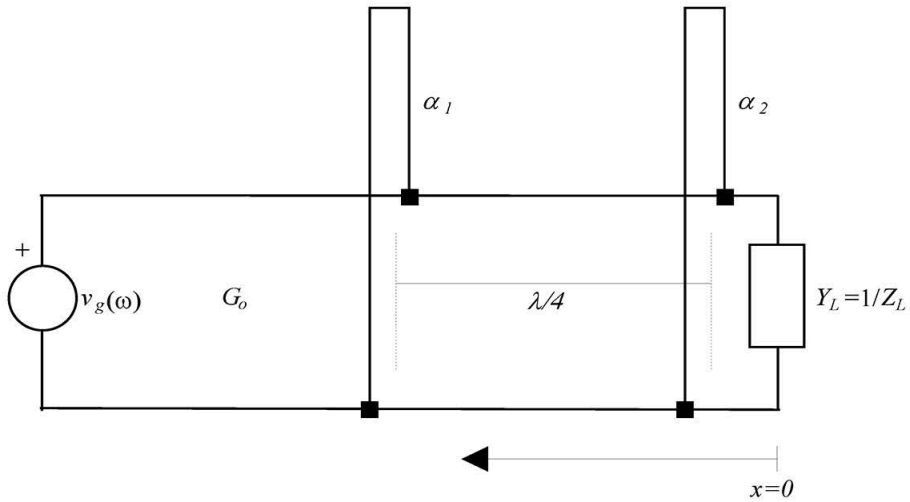


Figura 21.9 - Tratto di linea con doppio Stub.

Dall'esame di un singolo Stub si è visto che il primo passo da compiere è fare in modo che in una certa sezione della linea la parte reale dell'ammettenza fosse uguale ad 1, dopodiché con uno Stub applicato in quella sezione si annullava la parte immaginaria.

Nel caso del doppio Stub la sezione in cui avviene l'adattamento è sempre quella posta a $\lambda/4$ dal carico, quindi dobbiamo fare in modo che in questo punto si abbia parte reale pari ad 1 per l'ammettenza normalizzata.

Ora ci chiediamo quale sia il punto rappresentativo del carico sulla carta di Smith affinché con uno spostamento di $\lambda/4$ (ovvero di 180°) il punto stia sul cerchio parte reale uguale 1. Si vede immediatamente che il luogo dei punti sulla carta di Smith, tali che per una riflessione di 180° rispetto all'origine vanno a finire sul cerchio parte reale uguale ad 1, è il cerchio simmetrico rispetto alla retta verticale passante per il centro della carta.

In generale però il punto rappresentativo del carico si troverà fuori di questo cerchio. Con uno Stub posto sul carico posso modificare la parte immaginaria del carico fino ad intersecare il cerchio. Lo spostamento angolare mi fornisce la lunghezza α_2 di tale Stub (sempre in frazioni di λ).

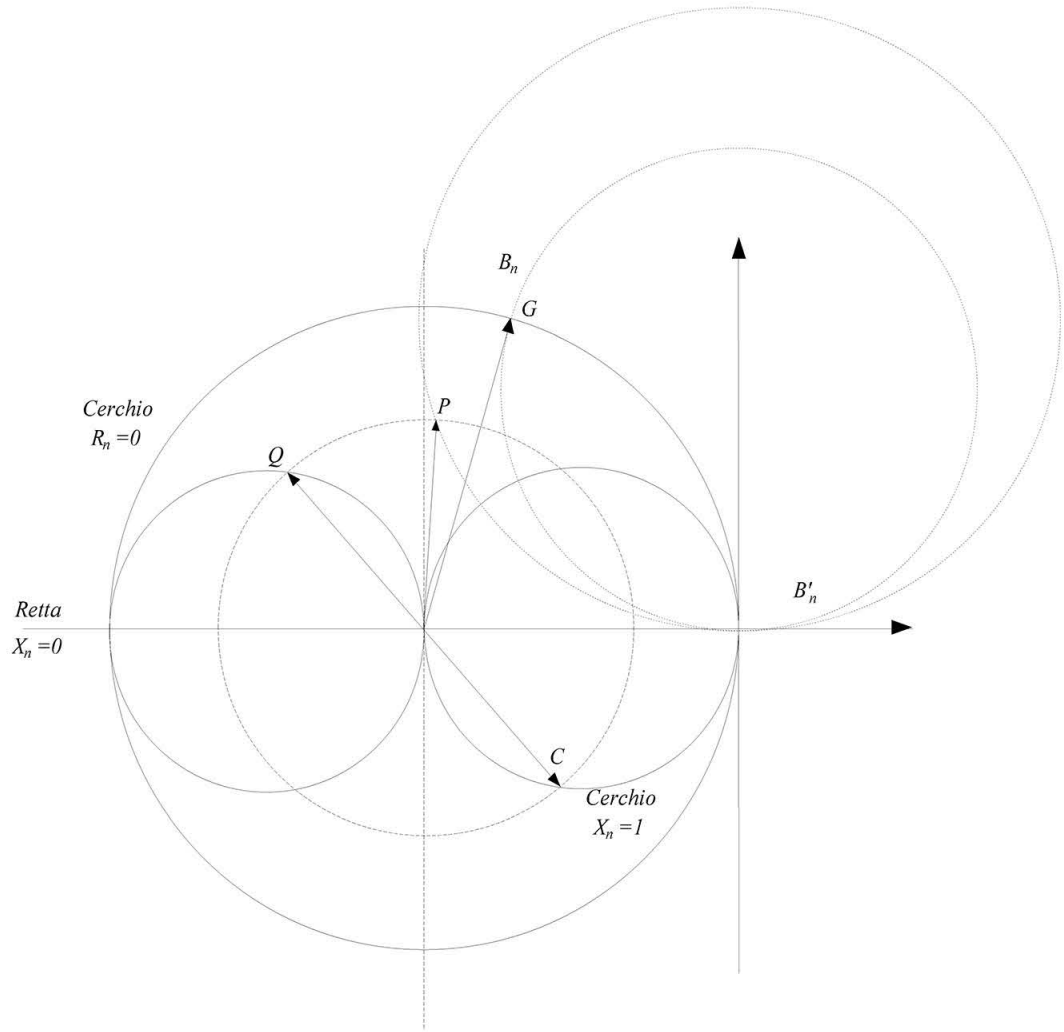


Figura 21.10 - Carta di Smith.

22 APPENDICI

22.1 GRANDEZZE VETTORIALI

Tralasciamo, in tale appendice, la definizione di ***spazio vettoriale*** a favore di una definizione più utile al contesto. Un *vettore* è una entità geometrica comunemente rappresentata mediante un segmento orientato. In base a tale definizione il *vettore* viene normalmente rappresentato attraverso una misura, una direzione e un verso.

Tale affermazione porta quindi a classificare il *vettore* come una entità di tipo matematico/geometrico anche se un suo impiego diretto si ha soprattutto in Fisica e in altre discipline. Esempi di grandezze vettoriali nel campo della fisica sono le forze, la velocità, l'accelerazione.

In uno spazio ordinario ad n dimensioni un segmento orientato è univocamente determinato da una coppia ordinata di punti (A,B), con A detto primo estremo e B secondo estremo. La coppia (A,B) è anche detta *vettore applicato* e viene indicato con $\overrightarrow{AB}$, con $\underline{AB}$, con la differenza $B-A$, oppure semplicemente con AB, anche se questa notazione è preferibilmente applicata ai segmenti ordinari della geometria euclidea. La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ (rispetto ad una prefissata unità di misura) indica la distanza tra i punti A e B e si rappresenta con $\|\overrightarrow{AB}\|$ o semplicemente, con $\|AB\|$.

Per la lunghezza dei segmenti ordinari della geometria euclidea continuiamo a usare il simbolo tradizionale $\overline{AB}$, oppure semplicemente AB. La direzione della retta individuata da A e B si chiama direzione del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$. Sulla retta passante per i punti AB viene univocamente determinato il verso del segmento orientato che è quello in cui A precede B.

Nell'insieme dei segmenti orientati si introduce la relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*:

$$\overrightarrow{AB} \text{ è equipollente a } \overrightarrow{CD} \implies \begin{cases} \|AB\| = \|CD\| \\ rette\ AB, CD\ parallele \\ versi\ \overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}\ identici \end{cases}$$

Secondo tale relazione di equivalenza, è possibile ripartire l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio in classi di equivalenza:

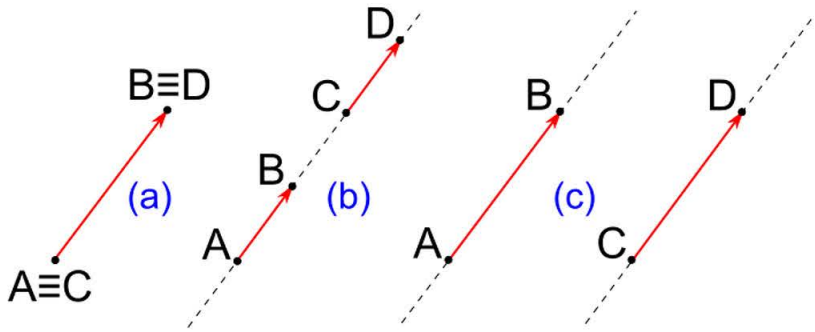


Fig. B.1 - esempi di vettori a due e due equipollenti

la classe di equivalenza individuata dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ è indicata con la notazione $[\overrightarrow{AB}]$.

Si chiama *vettore* una classe di equivalenza di segmenti orientati equipollenti, pertanto possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{v} = \vec{v} = \overline{v} = \underline{v} = [\overrightarrow{AB}]$$

Dove i primi 4 termini identificano le diverse notazioni comunemente utilizzate per identificare un vettore. In questo testo verrà utilizzata la quarta forma, ovvero una lettera sottolineata:

$$\underline{v} = [\overrightarrow{AB}]$$

È d'abitudine, per semplificare la notazione citata, nominare un *rappresentante* qualsiasi delle classi di equivalenza, ed operare direttamente con esso. Saranno quindi usuali e giustificate scritture del tipo:

$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

nella quale $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ non sono pensati come segmenti orientati, ma come rappresentanti di classi di equivalenza.

22.1.1 Operazioni lineari tra vettori

Nello spazio vettoriale vengono definite le operazioni di somma:

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

Prodotto scalare (prodotto esterno):

$$\sigma\underline{v} = \sigma[x_1, x_2, \dots, x_n] = [\sigma x_1, \sigma x_2, \dots, \sigma x_n], \qquad con\ \sigma \in \mathbb{R}$$

Si riportano le seguenti proprietà associate a queste operazioni:

$$\underline{v} + (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u}, \qquad associatività\ della\ somma$$

$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$, *commutatività della somma*

$\mathbf{0} + \underline{v} = \underline{v}$, *vettore nullo*

$\underline{v} + (-\underline{v}) = \mathbf{0}$, *vettore opposto*

$\sigma(\underline{v} + \underline{w}) = \sigma\underline{v} + \sigma\underline{w}$, *distributività della somma vettoriale*

$(\sigma + \gamma)\underline{v} = \sigma\underline{v} + \gamma\underline{v}$, *distributività della somma scalare*

$\sigma(\gamma\underline{v}) = (\sigma\gamma)\underline{v}$, *associatività mista*

$\mathbf{1} \cdot \underline{v} = \underline{v}$, *vettore unitario*

$\mathbf{0} \cdot \underline{v} = \mathbf{0}$, *vettore nullo*

22.2 Definizione operatori

Riportiamo in questo paragrafo le principali definizioni degli operatori frequentemente incontrati nelle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo:

- Si definisce con *vettore gradiente* di un campo scalare ϕ il *prodotto algebrico* di ∇ per ϕ:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{x}_0 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{y}_0 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{z}_0 \qquad (A.1)$$

- Si definisce con *scalare divergenza* di un campo vettoriale $\underline{v}$ il *prodotto scalare* di ∇ per $\underline{v}$:

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (A.2)$$

- Si definisce con *vettore rotore* di un campo vettoriale $\underline{v}$ il *prodotto vettoriale* di ∇ per $\underline{v}$:

$$\nabla \times \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\underline{x}_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\underline{y}_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\underline{z}_0 \qquad (A.3)$$

22.2.1 Identità tra Operatori

- Il *Rotore del gradiente* di un campo scalare ϕ è nullo:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)\underline{x}_0 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\underline{y}_0 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)\underline{z}_0$$

$$= 0 \qquad (A.4)$$

- La *Divergenza del rotore* di un campo vettoriale $\underline{v}$ è nulla:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z} = 0 \qquad (A.5)$$

- La *Divergenza del gradiente* di un campo scalare ϕ è la somma delle derivate parziali seconde di ϕ.

  Tale somma è detta *Laplaciano* dello scalare ϕ ed è spesso indicata dal simbolo Δ (oppure ∇^2).

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi = \nabla^2\phi \qquad (A.6)$$

- Il *Gradiente della divergenza* di un campo vettoriale $\underline{v}$:

$$\nabla(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\underline{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\underline{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\underline{z}_0 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\underline{x}_0 + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right)\underline{y}_0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\underline{z}_0 \qquad (A.7)$$

- Il *Rotore del rotore* di un campo vettoriale $\underline{v}$:

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{v})=\begin{bmatrix}\underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]\underline{x}_0$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]\underline{y}_0$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]\underline{z}_0=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\underline{x}_0+\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}\right)\underline{y}_0$$

$$+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z}\right)\underline{z}_0=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\underline{x}_0-\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\underline{x}_0+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}\right)\underline{y}_0-\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\right)\underline{y}_0+ \qquad (A.8)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\underline{z}_0-\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\underline{z}_0$$

Dove i termini colorati identificano termini aggiunti e tolti ad ogni componente.

Introduciamo ora il concetto di *Laplaciano di un vettore*:

$$\Delta\underline{v}=\nabla^2\underline{v}=\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\underline{x}_0+\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\underline{y}_0$$

$$+\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\underline{z}_0$$

Dove le tre componenti identificano lo *scalare divergenza* delle componenti di $\underline{v}$, ovvero:

$$\Delta\underline{v}=\Delta v_x\underline{x}_0+\Delta v_y\underline{y}_0+\Delta v_z\underline{z}_0,$$

$$\text{ovvero}\quad \nabla^2\underline{v}=\nabla^2 v_x\underline{x}_0+\nabla^2 v_y\underline{y}_0+\nabla^2 v_z\underline{z}_0 \qquad (A.9)$$

Si noti quindi che nella $(A.8)$ i termini a primo membro di ogni componente coincidono con il *Gradiente della divergenza* $(A.7)$, per cui utilizzando la $(A.9)$, si arriva a definire che:

$$\text{Rotore del rotore}(\underline{v}) \;=\; \text{Gradiente della divergenza}(\underline{v}) - \text{Laplaciano}(\underline{v})$$

ovvero

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla^2 \underline{v} = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \Delta \underline{v} \qquad (A.10)$$

22.3 Sviluppi in serie di Mc Laurin

22.3.1 Sviluppo in serie di una funzione

Lo scopo degli sviluppi in serie è di approssimare una funzione continua e derivabile in un punto x_0 del dominio della funzione con un polinomio di grado n arbitrario nella indeterminata $(x - x_0)$.

Gli sviluppi in serie possono tornare utili nel calcolo di forme di indecisione del tipo $^0/_0$, mentre non è possibile utilizzarli per forme di indecisione $^\infty/_\infty$, dal momento che non siamo in grado di sviluppare in serie una funzione nell'intorno dell'∞.

22.3.2 Sviluppo in serie di Mc Laurin

Lo sviluppo di *Mc Laurin* di ordine n di una funzione $f(x)$ è dato da:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\,x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

Per calcolare lo sviluppo di *Mc Laurin* di una funzione assegnata si procede calcolando le derivate successive di $f(x)$ e calcolandone i valori in corrispondenza di $x = x_0$.

vedi anche Formule di *Taylor* e di *Mc Laurin*

22.3.3 Notazione o (o piccolo)

Definizione: Siano f e g due funzioni reali di variabile reale definite in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, eccettuato al più il punto x_0.

Si dice che f è un o piccolo di g per x che tende a x_0, in simboli:

$$f = o(g) \text{ per } x \to x_0, \qquad \text{se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si noti che non è necessario richiedere che f e g siano definite nel punto x_0 in quanto la definizione coinvolge esclusivamente il limite del rapporto delle due funzioni per x che tende a x_0.

La notazione $f = o(g)$ la lettera "o" sta per "*zero*" (non viene usato perché darebbe luogo ad ambiguità di notazione) indica che la funzione f è uno zero (un infinitesimo di ordine superiore) della funzione g.

k *fattoriale* si indica $k!$, con $k \in \mathbb{N}$, ed è così definito: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. Per convenzione si pone $0! = 1$.

22.3.4 Sviluppi in serie

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

ricordando che il coefficiente binomiale è così definito:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Si riportano alcuni esempi derivati dalla serie precedente:

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1+x^2)} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{2n} x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \cdots + \binom{\frac{1}{3}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{3}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$